

2)  $N = 21,1 + 0,1V + 0,5COMP$ , где  $V$  – число операторов, уровень сложности, являющийся функцией количества внутренних и внешних связей. Таким образом, в последней модели сделан упор на учёт сложности П. По данным работы [32] уровень дефектности П связан с интенсивностью потока программных ошибок у пользователя зависимостью  $\lambda_{\text{ппо}} = (10^{-2} \dots 10^{-3}) \frac{N}{V}$ , что в принципе позволяло оценивать надёжность с помощью эмпирических моделей для прогнозирования состояния П на фазе разработки или на стадии сопровождения при модернизации П.

**Модель М. Холстеда** позволяет оценивать количество ошибок в П после окончания её разработки по формуле [68]:

$$N = K_T(N_1 + N_2) \log_2(\eta_1 + \eta_2), \quad (4.1)$$

где  $K_T$  – коэффициент пропорциональности, учитывающий технологические аспекты разработки П,  $\eta_1, \eta_2$  – число операторов и операндов в П,  $N_1, N_2$  – число обращений к операторам и операндам П соответственно.

**Модель компании IBM.** Во время эксплуатации пользователем текущей версии П разработчики, как правило, занимаются сопровождением этого программного продукта, то есть вносят некоторые улучшения или исправления в данную версию, не дожидаясь, пока пользователь этого потребует. И это сопровождение может включать в себя также добавление новых функций в П. С некоторого момента, когда разработчик считает свою задачу выполненной, начинается, так называемое, пассивное сопровождение, когда исправления вносятся уже только по запросу пользователя.

При сопровождении вносится в П значительное количество новых ошибок в каждую новую версию, вместе с доработками, изменениями и исправлениями, что требует исправлений также и в следующей версии. Разработчики компании IBM попытались предсказать количество подобных исправлений от версии к версии, основываясь на большом количестве экспериментальных данных, собранных в ходе сопровождения операционной системы OS/360. Модель, предложенная специалистами IBM, основана на наблюдении за ходом разработки этого программного продукта, и на гипотезе о статистической стабильности зависимости между

параметрами, характеризующими различные версии системы. В качестве основной единицы измерения сложности П был выбран программный модуль. Были стандартизованы правила создания модулей.

Объём  $i$ -й версии выражался количеством модулей  $M_i$ , входящих в данную версию. При выпуске  $i$ -й версии системы изменялся параметр  $СИМ_i$  (количества старых исправляемых модулей), и производилось добавление некоторого числа новых модулей  $НМ_i$ , так что  $M_i = M_{i-1} + НМ_i$ .

При доработке  $i$ -й версии [в период подготовки  $(i+1)$ -й] происходила дальнейшая коррекция модулей. Эти исправленные модули делились на две группы: первая группа характеризовалась параметром  $МИМ_i$  – многократно изменяемые модули (10 и более исправлений на модуль), и вторая группа –  $ИМ_i$ , модули с числом исправлений меньше 10. Эта классификация была необходима для упрощения вычислений, а также из-за того, что небольшое число исправлений было характерно для большинства модулей. Группа  $ИМ$  не требовала особых средств отладки, в то время как группа  $МИМ$  могла потребовать некоторых дополнительных усилий при отладке.

В ходе анализа сопровождения OS/360, что существует значительная зависимость между параметрами, характеризующими масштабы измерений и соответственно уровень содержания ошибок в группах  $ИМ$  и  $МИМ$ , и параметрами, характеризующими сложность и объём следующей версии ( $СИМ$  и  $НМ$ ). Применительно к OS/VSI это соотношение выглядело следующим образом:  $ИМ_i = 0,9НМ_i$ ,  $МИМ_i = 0,15НМ_i + 0,06СИМ_i$ .

Если предполагать, что термины «исправление» и «ошибка» идентичны, то тогда модель для оценивания общего количества ошибок в П, предложенная в компании IBM и основанная на приведённых выше объяснениях, записывается следующим образом:  $B_i = ИЗМ_i = 23МИМ_i + 2ИМ_i$ , где  $ИЗМ_i$  – общее количество исправлений, внесённое в модули (или, другими словами, общее количество ожидаемых ошибок), а коэффициенты 23 и 2 –

среднее количество исправлений на модуль для групп *МИМ* и *ИМ* соответственно.

Прогноз основывался на запланированном количестве исправлений в старых модулях и на количестве добавляемых модулей (*СИМ<sub>i</sub>*, *НМ<sub>i</sub>*) для реализации новых требуемых функций П. Если количество действительно внесённых исправлений меньше, чем предсказанное, то можно было сделать вывод о том, что в П имеется ещё некоторое количество необнаруженных ошибок. Модель компании IBM позволяет сделать следующие выводы:

– на этапе пассивного сопровождения П (*ИМ<sub>i</sub>* = 0, *СИМ<sub>i</sub>* – невелико) количество исправляемых модулей и количество исправлений внутри модулей быстро убывает от версии к версии;

– количество ожидаемых ошибок в следующей версии может увеличиваться по сравнению с прошлой версией, если достаточно много старых модулей было заменено (*СИМ*), и (или) было добавлено много новых модулей (*НМ*);

– добавление новых модулей оказывает более сильное влияние на рост числа новых ошибок, чем исправления, вносимые в старые модули.

В то же время, если есть возможность создать новый модуль вместо изменения старых, пяти или более, модулей, то это снижает ожидаемое количество ошибок. Другими словами, на некотором этапе сопровождения П изменение уже существующих модулей теряет свою эффективность, и вместо этого требуется добавление нового модуля.

Однако эмпирические модели достаточно грубы. Часто ошибки в расчётах различаются примерно на порядок с фактическими результатами. Кроме того, эти модели оперируют только с понятием корректности П, определяемой числом программных ошибок, но не отражают динамики вычислительного процесса при эксплуатации СВТ.

**Статистические модели.** В моделях этого класса оценка числа ошибок в П связывается с числом ошибок в ней пропорциональными соотношениями, определяемыми простыми статистическими методами на основе интуитивных допущений. При этом не формулируется никаких предположений о законах рас-

пределения случайных величин, а источником информации является только исследуемая П.

**Модель Миллса.** В модели использован принцип «посева» ошибок. В П случайно вносится некоторое известное количество ошибок и полагается, что темп обнаружения собственных и внесённых ошибок в ней одинаков [34].

Тогда число собственных ошибок П равно

$$N = \frac{n}{n_B} N_B,$$

где  $N_B$  – число внесённых ошибок,  $n$ ,  $n_B$  – число обнаруженных собственных и внесённых ошибок П. Статистическая мера доверия к этой модели определяется формулой

$$A(\tilde{N}, N_B) = \frac{N_B}{N_B + \tilde{N} + 1},$$

где  $\tilde{N}$  – предполагаемая оценка первичных ошибок к моменту начала тестирования. Считается, что  $n \leq \tilde{N}$ , и все внесённые ошибки устранены в процессе тестирования.

Серьёзным недостатком этой модели является предположение об одинаковости распределения внесённых и собственных ошибок, которое невозможно проверить, особенно на более поздних стадиях разработки П, когда многие простые ошибки, такие, как например, синтаксические, уже будут исправлены, и только наиболее сложные для обнаружения ошибки ещё остаются в П.

**Модель Коркорэна.** В данной модели предполагается наличие в П многих источников программных ошибок, а также различные вероятности проявления этих ошибок. Аргументом модели служит число прогонов П  $h$ . Оценка вероятности непрявления любой ошибки в П после выполнения  $h$  прогонов определяется как

$$\tilde{R}(h) = \frac{h^+}{h} + \frac{\sum_k \delta_k (n_k - 1)}{h},$$

где  $h^+$  – число успешных прогонов П,  $n_k$  – число обнаруженных ошибок  $k$ -го типа, устраняемых с вероятностью

$$p_k, \delta_k = \begin{cases} p_k & \text{при } n_k \geq 1, \\ 0 & \text{при } n_k = 0. \end{cases}$$

При росте  $h$  и условиях  $n_k \ll h$  и  $h^+ + h^- = h$ , где  $h^-$  – число прогонов П, заканчивающихся ошибкой, получается оценка

$$\text{Э. Нельсона: } \tilde{R}(h) = 1 - \frac{h^-}{h}.$$

**Модель Бейзина.** Пусть П содержит  $N_k$  команд. Из этого количества произвольно выбирается  $n$  команд, и в каждую из этих команд вносится ошибка. После этого для тестирования случайным образом выбирается  $r$  команд. Если в процессе тестирования было случайным образом  $m$  «засеянных» и  $v$  собственных ошибок, это значит, что, согласно методу максимального правдоподобия, начальное количество ошибок в П можно оценить как

$$\tilde{N}_{\text{Bezzin}} = \left\lceil v \frac{N_k - n + 1}{r - m} \right\rceil.$$

Здесь скобками обозначена целая часть числа.

При использовании модели уровень «пометки» (среднее количество помеченных команд) должен превышать 20, чтобы полученную оценку можно было считать достаточно объективной. Эта модель может применяться на любой стадии после того, как написание П будет закончено.

**Модель параллельного тестирования Б. Руднера.** Иногда эту модель называют простой эвристической моделью. Она позволяет избавиться от главного недостатка модели Миллса. Тестирование П производится параллельно двумя независимыми группами разработчиков П. Причём каждая группа использует свою стратегию поиска ошибок. Пусть множество ошибок, обнаруженных обеими группами равно  $m = m_1 \cup m_2$ , где  $m_i$ ,  $i = 1, 2$  – подмножества ошибок, обнаруженных каждой из них, причём  $m_1 \cap m_2 \neq \emptyset$ . Эффективность тестирования групп определяется как  $\mathcal{E}_1 = m_{12} / m_2$ ,  $\mathcal{E}_2 = m_{12} / m_1$ . Тогда получают выражение для полного количества ошибок П в виде  $N = m_{12} / \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2$ , где  $m_{12}$  – количество общих ошибок, то есть обнаруженных обеими группами, первой и второй. А также, используя гипергеометрическое

распределение и метод максимального правдоподобия, начальное количество ошибок, содержащихся в П, можно оценить как  $\tilde{N}_{\text{Rudner}} = m_1 m_2 / m_{12}$ .

Рассмотренные статистические модели отражают подход к определению показателей надёжности П как единичных характеристик, оценивающих корректность П. Основной параметр – число ошибок в П. Поэтому статистические модели имеют оценочный характер, так как уровень надёжности П рассматривается для имитационной среды тестов. Основная область использования их – завершающие стадии фазы разработки П, ибо они предполагают отладочную корректировку П. Могут ограниченно применяться на стадии фондирования. Особенно это относится к модели Коркорэна, учитывающей специфику функционирования в реальной операционной среде введением аргумента – количества прогонов П. В то же время применение статистических моделей предполагает интуитивное решение вопросов оценивания, например, вероятностей  $p_k$  и числа вносимых ошибок  $n_B$  в П.

**Вероятностные модели** – наиболее представительная группа моделей. В неё включены наиболее сложные модели, описывающие случайные процессы обнаружения и проявления программных дефектов или ошибок.

Они основаны на описании случайных процессов появления ошибок и характеризуют процесс отладки. В состав параметров моделей входит исходное число ошибок –  $E_0$ , и поэтому модели описывают только свойство корректности. Обобщённая вероятностная модель основана на том, что в зависимости от времени отладки или испытаний скорость выявления ошибок уменьшается и основана на зависимости

$$\frac{dE(t)}{dt} = q(t) - g(t), \quad (4.2)$$

в которой  $q(t)$  и  $g(t)$  – интенсивности внесения новых и выявления имеющихся ошибок в ПО.

Вероятностные модели оценивают надёжность в функции непрерывного времени либо отладки  $\tau$  и (или) оперативного функционирования  $t$ . Они строятся в предположении, что интенсивность зависит от числа оставшихся ошибок  $E(t)$  и измеряется

чаще всего линейно или геометрически. Следовательно, текущее число ошибок  $E(t)$  может служить параметром для  $g(t)$ , то есть

$g(t) = L\{E(t)\}$ , тогда  $\frac{dE(t)}{dt} = q(t) - L\{E(t)\}$ . Имея вид оператора

$L$ , можно получать многие вероятностные модели. Одной из таких моделей является модель J. Musa. В случае, когда  $q(t)$ ,  $g(t)$  изменяются дискретно, например, в зависимости от числа прогонов П, обобщённую модель можно представить в виде:

$$\Delta E(n) = \sum_{i=1}^n q(i) - \sum_{i=1}^n g(i) \quad (4.3)$$

где  $i$  – номер группы испытаний. Группу образуют последовательность прогонов между смежными ошибками. Используя  $Z$ -преобразование при аналогичных допущениях для  $E(t)$ ,  $q(t)$ ,  $g(t)$ , можно получить модели надёжности Волкова и Нельсона.

**Модель Дж. Мусы.** Предположим, что в начале отладки программы П при  $\tau = 0$  в ней содержится  $E_0$  первичных ошибок. После отладки П в течение времени  $\tau$  в ней осталось  $n_0$  ошибок и устранено  $n$  ошибок. Тогда  $n_0 + n = E_0$ . Время  $\tau$  соответствует длительности исполнения П на ЭВМ для обнаружения ошибок и не учитывает время для анализа и корректировки результатов. Реальное время всегда больше (анализ результатов решения, обнаружение, локализация ошибок, их устранение).

Интенсивность обнаружения ошибок пропорциональна количеству оставшихся в П ошибок:

$$\frac{dn}{d\tau} = kn_0 = k(E_0 - n). \quad (4.4)$$

Коэффициент  $k$  учитывает масштаб времени процесса обнаружения ошибок по сравнению со временем её функционирования П в реальных условиях эксплуатации. Из (4.4) следует:

$$\frac{dn}{d\tau} + n = kE_0. \quad (4.5)$$

Решение дифференциального уравнения (4.5) при условии, что в момент  $\tau = 0$ ,  $n = 0$ ,  $n_0 = E_0$ , равно:

$$n(\tau) = E_0[1 - \exp(-k\tau)]. \quad (4.6)$$

Тогда число оставшихся в П ошибок будет равно:

$$n_0(\tau) = E_0 \exp(-k\tau). \quad (4.7)$$

Наработка на ошибку, которая рассматривается как время между обнаруживаемыми ошибками в вычислительном процессе, равна обратной величине интенсивности обнаружения оставшихся ошибок:

$$T(\tau) = \frac{1}{\frac{dn_0(\tau)}{d\tau}} = \frac{1}{kE_0} \exp(k\tau). \quad (4.8)$$

До начала тестирования и отладки П в ней имелось  $E_0$  первичных ошибок, и этому соответствует наработка на ошибку:

$$T_0 = \frac{1}{kE_0}. \quad (4.9)$$

Поэтому из формулы (4.8) с учётом (4.9) следует:

$$k = \frac{1}{E_0 T_0}, \quad T(\tau) = T_0 \exp\left(\frac{\tau}{E_0 T_0}\right). \quad (4.10)$$

Если закон распределения времени между ошибками экспоненциальный, то будем иметь:

$$P(t, \tau) = \exp\left(-\frac{t}{T(\tau)}\right) = e^{-\frac{t}{T_0} e^{-\frac{\tau}{E_0 T_0}}}, \quad (4.11)$$

где  $P(t, \tau)$  – вероятность безошибочного функционирования П в течение времени  $t$ , при условии, что она предварительно отлаживалась в течение времени  $\tau$ .

Плотность распределения времени до ошибки П будет равна:

$$a(t, \tau) = -P'_t(t, \tau) = \frac{1}{T_0} e^{-\frac{t}{E_0 T_0}} e^{-\frac{t}{T_0} e^{-\frac{\tau}{E_0 T_0}}}. \quad (4.12)$$

Интенсивность проявления или обнаружения ошибки будет равна:

$$\lambda(t, \tau) = \frac{1}{T_0} e^{-\frac{\tau}{E_0 T_0}}. \quad (4.13)$$

Если имеются моменты обнаружения и устранения ошибок конкретной П  $\tau_i, i = 1, 2, \dots, l$ , то, используя метод максимального правдоподобия (ММП), можно найти оценки параметров модели  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{T}_0$ .

**Численный пример** для исходных данных:  $E_0 = 12$ ;  $T_0 = 25$ ;  $\tau = 5$ . На рис. 4.1 представлены вероятность безошибочного функционирования, плотность вероятности и интенсивность проявления ошибки. На рис. 4.2 показано изменение интенсивности ошибки в зависимости от времени тестирования (отладки) программы.

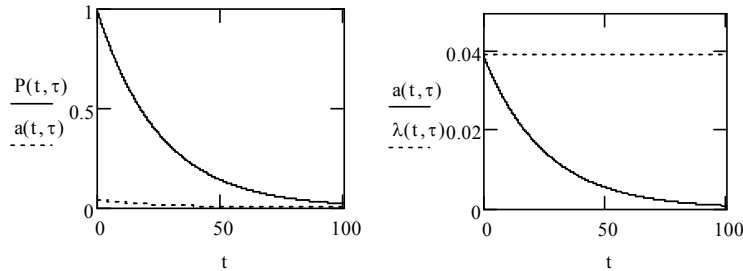


Рис. 4.1

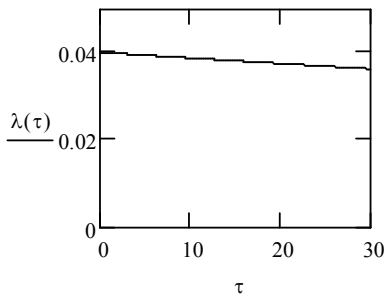


Рис. 4.2

Изменяя значения параметров  $E_0, T_0, t, \tau$ , можно построить семейство подобных графиков и проанализировать влияние их на значения показателей в рассматриваемой модели.

**Модель Л.И. Волкова** описывает приращение вероятности безошибочного функционирования П  $\Delta R(j)$  после исправления в ней  $j$ -й ошибки функцией вида:

$$\Delta R(j) = \alpha_j(1 - R(j-1)) - \beta_j R(j-1), \quad (4.14)$$

где  $\alpha_j$  – коэффициент, характеризующий степень влияния после устранения в ПО  $j$ -й ошибки [увеличения  $R(j)$  после устранения  $j$ -й ошибки],  $\beta_j$  – коэффициент, характеризующий степень влияния после внесения в ПО  $j$ -й ошибки (уменьшения  $R(j)$  после внесения  $j$ -й новой ошибки). Уравнение (4.10) сводится к виду:

$$R(j) = R_0 + \sum_{k=1}^j \Delta R(k). \quad (4.15)$$

Переходя к рекуррентному выражению и усредняя для простоты  $\alpha_j, \beta_j$ , получим:

$$R(j) = R(j-1) + \alpha(1 - R(j-1)) - \beta R(j-1) = \alpha + (1 - \alpha - \beta)R(j-1). \quad (4.16)$$

При  $j \rightarrow \infty$   $R(j) = R(j-1)$ , поэтому  $R_\infty = \alpha / (\alpha + \beta)$ . Тогда получим следующее выражение:

$$R(j) = R_\infty - (R_\infty - R_0) \left(1 - \frac{\alpha}{R_\infty}\right)^j. \quad (4.17)$$

**Численный пример** для исходных данных:  $\alpha = 0,25$ ;  $R_0 = 0,2$ ;  $R_\infty = 0,95$ . На рис. 4.3 показана зависимость вероятности успешного прогона программы от числа исправленных в ней ошибок.

Это одна из «моделей роста надёжности» ПО. Параметрами модели являются  $R_0, \alpha, \beta$ . Для оценки значений параметров  $\tilde{R}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  по статистическим данным можно использовать ММП.

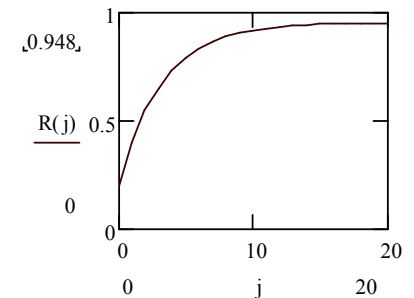


Рис. 4.3

**Модель Э. Нельсона.** Программа может быть определена как вычисляемая функция  $F$  на множестве  $E$  всех значений наборов входных переменных, таких, что каждый элемент  $E_i$  множества  $E$  представляет собой набор значений данных, необходимый для выполнения программы:  $E = (E_i : i = 1, 2, \dots, N)$ . Выполнение  $\Pi$  приводит к получению для каждого  $E_i$  определённого значения функции  $F(E_i)$ . Множество  $E$  определяет все возможные вычисления в  $\Pi$ , то есть каждому набору входных данных  $E_i$  соответствует некоторый прогон  $\Pi$ , и наоборот, каждому прогону соответствует некоторый набор входных данных  $E_i$ . Наличие ошибок в  $\Pi$  приводит к тому, что ей на самом деле соответствует функция  $F'$ , отличная от заданной функции  $F$ . Для некоторого  $E_i$  отклонение выхода  $F'(E_i)$  в результате выполнения  $\Pi$  находится в допустимых пределах  $\Lambda_i$ , то есть  $|F'(E_i) - F(E_i)| \leq \Lambda_i$ . Для остальных  $E_i$ , образующих подмножество  $E_e$  множества  $E$ , выполнение  $\Pi$  не обеспечивает приемлемого результата, то есть  $|F'(E_i) - F(E_i)| > \Lambda_i$ , либо работа  $\Pi$  прекращается преждевременно, или выполнение её не может закончиться и программа закичивается. Каждое  $E_i$  представляет возможную комбинацию входных переменных. Число  $N$  значений  $E_i$  очень велико, но конечно, так как с помощью машинного слова фиксированной длины, возможно, представить лишь конечное число различных значений переменной. Событие, состоящее из ввода  $E_i$ , выполнения  $\Pi$  и получения результата  $F'(E_i)$ , или невыполнения  $\Pi$  называется прогоном  $\Pi$ . Вероятность  $Q$  того, что прогон  $\Pi$  приведёт к неправильному, ошибочному результату, равна вероятности, что набор входных данных  $E_i$ , использованный в прогоне, принадлежит множеству  $E_e$ . Если  $n_e$  есть число различных наборов значений входных данных, содержащихся в  $E_e$ , то

$$Q = \frac{n_e}{N}. \quad (4.18)$$

А вероятность того, что прогон  $\Pi$  на наборе  $E_i$ , случайно выбранном из  $E$  среди равновероятных, приведёт к получению приемлемого результата, будет равна:

$$P = 1 - Q = 1 - \frac{n_e}{N}. \quad (4.19)$$

Однако в процессе реального функционирования  $\Pi$  выбор входных данных из  $E$  обычно осуществляется не с одинаковыми априорными вероятностями, а определяется реальными условиями работы. Эти условия можно охарактеризовать некоторым распределением вероятностей  $p_i$ , того, что будет сделан выбор именно входных данных  $E_i$ . Это множество вероятностей  $p_i$  называется функциональным разрезом.

Распределение  $Q$  может быть определено через  $p_i$  с помощью «динамической переменной»  $y_i$ , принимающей значение 0, если прогон  $\Pi$  на наборе  $E_i$  заканчивается вычислением приемлемого значения функции, и значение 1, если этот прогон заканчивается ошибочным результатом. Тогда

$$Q = \sum_{i=1}^N p_i y_i \quad (4.20)$$

есть вероятность того, что прогон  $\Pi$  на наборе входных данных  $E_i$ , выбранных в соответствии с распределением  $p_i$ , закончится ошибкой, и

$$P = 1 - Q = \sum p_i (1 - y_i) \quad (4.21)$$

есть вероятность того, что прогон  $\Pi$  с входными данными  $E_i$ , выбранными с распределением  $p_i$ , приведёт к правильному выполнению  $\Pi$ . А вероятность успешного выполнения  $n$  прогонов программы при независимом для каждого прогона выборе исходных данных будет равна:

$$R(n) = R^n = (1 - Q)^n. \quad (4.22)$$

Поэтому прогон является единичным испытанием программы.

На практике выбор входных данных для каждого прогона не является независимым за исключением некоторых случаев.

Функциональный разрез может быть переопределён в терминах вероятностей  $p_{ij}$  выбора  $E_i$  в качестве входных данных при

$j$ -м прогоне из некоторой последовательности прогонов. Тогда вероятность того, что  $j$ -й прогон закончится ошибкой, может быть записана в виде:

$$Q_j = \sum p_{ij} y_i. \quad (4.23)$$

Поэтому

$$R(n) = \prod_{j=1}^n (1 - Q_j) = e^{\sum_{j=1}^n \ln(1 - Q_j)}. \quad (4.24)$$

А при  $Q_j \ll 1$   $R(n) = e^{-\sum_{j=1}^n Q_j}$ , если же  $Q_j = Q$  для всех  $j$ , то  $R(n) = e^{-Qn}$ .  $R(n)$  можно представить и в зависимости от времени функционирования П. Пусть  $\Delta t_j$  время выполнения  $j$ -го прогона

П, а  $t_j = \sum_{l=1}^j \Delta t_l$  – суммарное время выполнения  $j$  прогонов П.

Пусть также  $\lambda(t_j) = -\frac{\ln(1 - Q_j)}{\Delta t_j}$ . Тогда  $R(n) = e^{-\sum_{j=1}^n \lambda(t_j) \Delta t_j}$ . Если ве-

личина  $\Delta t_j \rightarrow 0$  с ростом  $n$ , тогда следует:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(z) dz}. \quad (4.25)$$

Это формула вероятности безотказной работы технической системы или её элемента. Величина  $\lambda(t_j)$  может быть представлена как функция интенсивности ошибки. Она, будучи умножена на  $\Delta t_j$ , означает условную вероятность ошибки в интервале  $(t_j, t_j + \Delta t_j)$  при отсутствии ошибки до момента  $t_j$ .

Рассмотрим оценку надёжности П. Если выполнено  $n$  прогонов программы на наборах входных данных, то оценка вероятности определяется по формуле:

$$\hat{R} = 1 - \frac{\hat{n}_e}{n},$$

где  $n_e$  – число наборов входных данных, при которых произошли рабочие ошибки. Если выборка из  $n$  наборов входных данных из  $E$  осуществляется согласно распределению вероятностей  $p_i$ , то

расчётное значение  $\hat{R}$  будет представлять собой несмещённую оценку вероятности  $R$  в том смысле, что для  $p_{ij} \ll 1$  ожидаемое значение  $R$  на всём множестве наборов входных данных в пределах выборки равно  $R$ . Это можно показать таким образом. Вводится характеристика выборки  $z_{ij}$ , такая, что  $z_{ij} = 1$ , если  $E_i$  входит в выборку  $j$ ;  $z_{ij} = 0$  в противном случае. Число различных наборов входных данных  $n_j$ , входящих в выборку  $j$ , может быть меньше  $n$ , так как некоторые наборы  $E_i$  могут быть включены в неё более одного раза. Поэтому  $\sum_{i=1}^N z_{ij} = n_j$ . Однако, в большинстве случаев число возможных наборов входных данных  $N$  настолько больше размера выборки, что повторный выбор каких либо наборов маловероятен. Пусть  $s_j$  – вероятность того, что взята выборка  $j$ , и  $M$  – количество всевозможных выборок. Тогда

$$\sum_{j=1}^M z_{ij} s_j = 1 - (1 - p_i)^n. \quad (4.26)$$

Так как оценку можно представить в виде:  $\hat{R}_j = \frac{1}{n} \sum (1 - y_i) z_{ij}$ , то её математическое ожидание будет равно:

$$\begin{aligned} M(\hat{R}) &= \sum s_j \hat{R}_j = \frac{1}{n} \sum s_j \sum (1 - y_i) z_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (1 - y_i) \sum_{j=1}^M s_j z_{ij} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (1 - y_i) [1 - (1 - p_i)^n] = \sum_{i=1}^N (1 - y_i) p_i. \end{aligned} \quad (4.27)$$

В том случае, когда  $p_i \ll 1$   $M(\hat{R}) = 1 - Q = R$ .

Для получения оценки должен быть определён функциональный разрез  $p_i$  П. На практике этот разрез определяется путём разбиения всего пространства значений входных данных на подпространства и нахождения вероятностей того, что выбранный набор входных данных будет принадлежать конкретному подпространству как показано на рис. 4.4. Определение этих вероятностей основывается на оценке вероятностей появления тех или иных входов в реальных условиях функционирования, относительно которых оценивается надёжность программы.

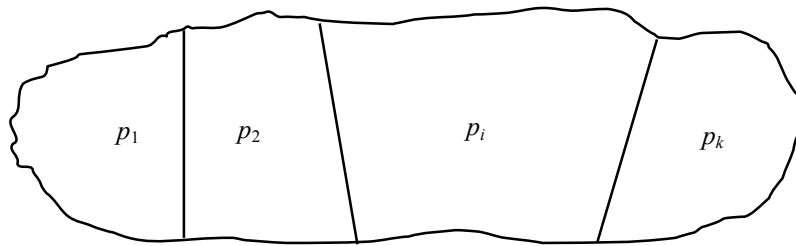


Рис. 4.4

После определения вероятностей  $p_i$  случайная выборка из  $n$  наборов входных данных, распределённых в соответствии с  $p_i$ , может быть получена с помощью некоторого датчика случайных чисел. После реализации  $n$  испытаний П для одних входных наборов данных результаты окажутся правильными, а для других могут быть зафиксированы ошибки. При этом процесс испытаний не должен прекращаться, а ошибки не должны устраняться до завершения всех  $n$  прогонов. На основании полученных данных может быть вычислена оценка вероятности  $\hat{R}$ . Из опыта на примерах оценивания надёжности П установлено, что П с более высокой оценкой  $\hat{R}$  имеет более простую структуру. Этот факт подтверждает установившееся мнение, что усложнение структуры программ ведёт к снижению их надёжности.

Модель Нельсона была разработана с учётом основных свойств машинных программ и использует методы теории вероятностей лишь тогда, когда невозможно получить полную информацию о том или ином факторе, например при ответе на вопрос, какой набор входных данных нужно взять при следующем прогоне П. Все приближения, принятые в модели, достаточно чётко определены, известны границы их применимости. Так как в основу данной модели положены свойства программного обеспечения, она допускает развитие за счёт более детального описания других аспектов надёжности. Вследствие указанных особенностей модели она рассматривалась в качестве основополагающей модели надёжности программного обеспечения.

Итак, в основу модели Нельсона положен факт, что в П ошибки проявляются не столько в функции времени, сколько в

функции, связанной с прогоном данных. Надёжность оценивается по результатам прогонов П на выборке  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  из  $n$  случайных векторов  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ii})$  по формуле  $R = 1 - n_i/n$ , где  $n_i$  – число прогонов, завершившихся ошибкой,  $R$  – вероятность успешного однократного прогона П.

Каждый из  $x_i \in X$  и сама выборка  $X$  должны отражать реальные условия функционирования П, относительно которых производится оценка надёжности. На практике всё векторное пространство  $X$  значений входных данных П разбивается на семейства подпространств  $\{X_k\}$  таким образом, чтобы любой из  $x_i \in X_k$  приводил к выполнению П только по одному маршруту  $B_k$ , число маршрутов (путей) и сами пути определяются по управляющему графу П  $\Gamma(B, D)$ , где  $B$  – множество вершин (линейных участков П),  $D \subseteq \{B \times B\}$  – множество дуг (связей по управлению линейных участков). Тогда реальные условия функционирования можно охарактеризовать совокупностью вероятностей  $p_k = \text{Вер}(x_i \in X_k)$ ,  $k = \overline{1, m}$  того, что случайная величина  $x_i$  приведёт к прогону П по  $k$ -му пути. Определение значений  $\{p_k\}$  основано на знании появления тех или иных значений компонент  $x_{ij} \in X_i$  и осуществляется либо методом псевдогистограмм, либо методами теории эксперимента. Как только вероятности  $p_k$  определены, случайная выборка из  $n$  векторов  $X_i$  может быть сформирована с помощью датчика случайных чисел в соответствии с  $\{p_k\}$ .

Имеется модификация модели Нельсона. Она основана на знании значений  $\{p_k\}$  и вероятностей  $\{R(b_j)\}$  однократного безошибочного выполнения последовательности операторов, ассоциированных с вершиной  $b_j$ . Пусть  $B_k$  –  $k$ -й путь,  $B_k = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ . Вероятность успешного однократного прогона П по пути  $B_k$  при условии, что  $X_i \in X_k$ , будет определяться по формуле:

$$R(B_k, X_i \in X_k) = \prod_{j=1}^l R(b_j), \quad (4.28)$$



а безусловная вероятность успешного однократного прогона  $\Pi$  равна сумме

$$R = \sum_{k=1}^m p_k \prod_{j=1}^{l_k} R(b_j), \quad (4.29)$$

где  $m$  – общее число путей  $\Pi$ , а  $l_k$  – число последовательных операторов  $k$ -го пути.

Выборка  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , формируемая в соответствии с вероятностями  $p_k$ , может затрагивать не все подмножества  $x_k$ , что ухудшает её представительность и завышает оценку надёжности  $\Pi$ . Для оценки представительности выборки  $X$  можно использовать критерий

$$\chi^2 = \sum_{k \in M_1} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}, \quad (4.30)$$

где  $M_1$  – множество индексов подмножеств  $x_k$ , покрываемых выборкой  $X$ ;  $n_k$  – число входных векторов  $x_i$  в последовательности  $X$ , для которых выполняется условие  $x_i \in x_k$ ,  $n = \sum_k n_k$ .

Предположим, что  $X$  разбито на  $M$  подпространств, то есть  $X = \bigcup_{k=1}^M x_k$ , что означает существование в  $\Pi$   $M$  путей. Тогда минимальное возможное значение  $\chi^2 = n \sum_{k \in M_2} p_k / \sum_{k \in M_1} p_k$ , то есть предельная оценка пропорциональна сумме вероятностей  $p_k$  тех путей, которые не затрагивались выборкой  $X$  ( $M_2 = M - M_1$ ), и обратно пропорциональна сумме вероятностей путей, которые затрагивались выборкой  $X$ .

Достоверность оценки надёжности в данной модели зависит от соответствия выбора входных наборов данных, используемых при тестировании  $\Pi$  и получении последующей оценки её надёжности, распределению вероятностей  $p_i$ , отвечающих реальным условиям работы  $\Pi$ . Данное соответствие может быть установлено оценкой состоятельности входных наборов данных [18]. Пусть совокупность входных наборов данных для оценки надёжности  $\Pi$  равна  $N$ . Назовём эту совокупность пакетом тестов. Допустим, что в результате успешного прогона тестов, то есть совокупности векторов входных

переменных  $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $n = \overline{1, N}$ , получены векторы входных переменных  $Y_n = (y_1, y_2, \dots, y_Q)$ . Матрицы значений входных  $k_x = \|x_{nm}\|_{N \times M}$ ,  $m = \overline{1, M}$  и выходных  $k_y = \|y_{nq}\|_{N \times Q}$ ,  $q = \overline{1, Q}$  переменных позволяют построить таблицу взаимного соответствия рассматриваемых векторов. На основе этой таблицы может быть сформировано  $Q$  корреляционных матриц  $R_{(M+1)(M+1)}^{(q)}$  [18]. Каждая матрица определяет корреляционную связь между  $q$ -компонентом вектора и всеми компонентами вектора  $X$ . Первая строка каждой корреляционной матрицы имеет вид  $(1 \ r_{yqx_1} \ r_{yqx_2} \ \dots \ r_{yqx_M})$ . На её основе формируется положительная обратимая матрица  $A_q = \|a_{ij}^{(q)}\|_{M \times M}$ . Далее, согласно теореме Перрона-Фробениуса [17] неотрицательная квадратная матрица всегда имеет положительное характеристическое число  $\lambda_{\max}^{(q)}$ , которое является простым корнем характеристического уравнения и превосходит модули всех других характеристических чисел матрицы. Так как матрица  $A_q$  удовлетворяет указанным требованиям, условием её состоятельности в соответствии с [78] является выполнение равенства  $\lambda_{\max}^{(q)} = M$ . Но так как вероятность строгого выполнения этого равенства достаточно мала, критерием состоятельности  $s_q$  пакета тестов относительно  $q$ -го компонента вектора  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_q)$  может служить выражение [78]  $s_q = \sqrt{\mu_q / 2} < 1$ , где  $\mu_q = (\lambda_{\max}^{(q)} - M) / (M - 1)$ . Отсюда может быть получен вектор оценки состоятельности пакета тестов применительно ко всем компонентам  $y_q$ ,  $q = \overline{1, Q}$  вектора  $Y$  [14]:  $S = (s_1, s_2, \dots, s_Q)$ . Полученная оценка состоятельности входных наборов данных будет свидетельствовать о степени логической взаимосвязанности пакета тестов и исследуемой  $\Pi$ .

**Примечание.** Модель Э. Нельсона, использующая структуру входных данных, начала применяться на практике только после её доработки, связанной с применением последовательного анализа А. Вальда. При её использовании на практике встречаются две кате-

гории трудностей. Первая связана с нахождением вероятностей  $p_{ij}$  – параметров распределения входных данных. Вторая связана с необходимостью выполнения значительного количества прогонов  $\Pi$  (десятки и сотни тысяч) для получения приемлемой точности оценок вероятности безошибочной работы. Именно эта категория трудностей и решается применением статистического метода А. Вальда.

**Модель Седакина–Джегинского–Моранды.** До изложения самой модели представим распределение импульсов редующего пуассоновского потока, полученного Н.М. Седакиным. Суммарный поток в момент времени  $t_0=0$  состоит из  $n$  элементарных пуассоновских потоков, интенсивность каждого из которых равна  $\mu_0$ . Интенсивность суммарного потока в момент  $t_0=0$  равна  $\mu(t_0) = n\mu_0$ . Тогда интенсивность суммарного потока в любой момент времени  $t$  можно представить в виде:

$$\mu(t) = \begin{cases} n\mu_0, & t \leq t_1, \\ (n-i+1)\mu_0, & t_{i-1} < t < t_i, \\ 0, & t > t_n, \end{cases} \quad (4.31)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $i$  – индекс моментов времени  $t_i$ , в каждый из которых происходит уменьшение интенсивности потока на единицу. При этом  $t_1$  – момент первого импульса после  $t_0$ ;  $t_2$  – момент второго импульса после  $t_0$  и т.д. Длительность интервалов между моментами появления смежных импульсов равна:

$$\tau_{n,i} = t_i - t_{i-1}. \quad (4.32)$$

Поскольку каждый из элементарных потоков пуассоновский, то плотность вероятности длительности интервала между моментами появления смежных импульсов определяется выражением:

$$a_{n,i}(t) = (n-i+1)\mu_0 e^{-(n-i+1)\mu_0 t} \quad (4.33)$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Характеристическая функция переменной  $\tau_{n,i}$  равна:

$$g_{n,i}(s) = \int_0^{\infty} \tau_{n,i}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{\bar{\mu}_{n,i}}{\bar{\mu}_{n,i} + s}, \quad (4.34)$$

где  $\bar{\mu}_{n,i} = (n-i+1)\mu_0$ . Тогда характеристическая функция момента появления  $k$ -го импульса определится выражением:

$$g_k(s) = \prod_{i=k}^n g_{n,i}(s), \quad (4.35)$$

а плотность вероятности момента появления  $k$ -го импульса будет представлена как

$$u_k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} g_k(s) e^{ts} ds. \quad (4.36)$$

Подставляя (4.34) в (4.35) и вычисляя (4.36), найдём

$$u_k(t) = k\mu_0 C_n^k \sum (-1)^{k-r} C_{k-1}^{r-1} e^{-(n-r+1)\mu_0 t}. \quad (4.37)$$

Вероятность появления не менее  $k$  импульсов за время  $t$  будет равна:

$$p_{\geq k}(t) = \int_0^t u_k(z) dz = k C_n^k \sum (-1)^{k-r} \frac{C_{k-1}^{r-1}}{n-r+1} [1 - e^{-(n-r+1)\mu_0 t}]. \quad (4.38)$$

Выражение (4.38) можно представить в виде

$$p_{\geq k}(t) = 1 - n \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} \frac{C_{n-1}^{r-1}}{n-r+1} e^{-(n-r+1)\mu_0 t}. \quad (4.39)$$

На практике часто используется случай, когда  $k = n$ , при этом имеем:

$$p_{\geq n}(t) = 1 - n \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} \frac{C_{n-1}^{r-1}}{n-r+1} e^{-(n-r+1)\mu_0 t}. \quad (4.40)$$

Математическое ожидание времени полного исчезновения потока определится следующим образом:

$$T_n = \int_0^{\infty} t g_n(t) dt = \frac{1}{\mu_0} \sum_{r=1}^n \frac{1}{r}, \quad (4.41)$$

так как в формуле (4.41)  $g_n(t) = n\mu_0 \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} C_{n-1}^{r-1} e^{-(n-r+1)\mu_0 t}$ .

Если импульсы потока обнаруживаются, регистрируются вероятностью  $p < 1$ , тогда плотность вероятности длительности интервалов между импульсами определяется выражением:

$$a_{n,i}(t) = (n-i+1)p\mu_0 e^{-(n-i+1)\mu_0 t}, \quad (4.42)$$

а вероятность появления количества импульсов  $\geq k$  будет представлена в виде:

$$p_{\geq k}(t) = 1 - k C_n^k \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} \frac{C_{k-1}^{r-1}}{n-r+1} e^{-(n-r+1)p\mu_0 t}. \quad (4.43)$$

Среднее время полного исчезновения потока будет определяться по формуле:

$$T_n = \frac{1}{p\mu_0} \sum_{r=1}^n \frac{1}{r}. \quad (4.44)$$

Теперь рассмотрим саму модель надёжности, которую в литературе часто называют по имени её создателей **моделью Джеллинского-Моранды**. Она основана на изучении потоков ошибок. Реализации этих потоков характеризуют надёжность функционирования П. Поток ошибок присущи следующие свойства:

- единственность реализации,
- случайность и нестационарность,
- тенденция к редению во времени.

Таким образом, П улучшает своё качество и способна к самообучению. Будем полагать, что реализация потока ошибок П имеет вид, показанный на рис. 4.5.

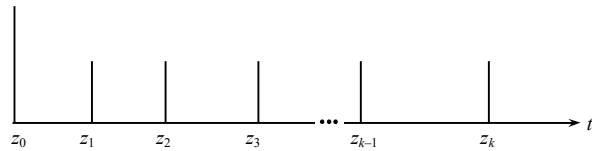


Рис. 4.5

Для рассмотрения процесса надо задаться законом распределения длительности интервалов времени между соседними событиями – ошибками. Как правило, для всех интервалов закон один и тот же, но параметры его изменяются в зависимости от номера интервала. Параметры закона находятся в результате обработки статистических данных об ошибках. При этом в модели принимаются следующие допущения:

- ошибка в П обусловлена только одним её дефектом,
- отыскание и устранение дефекта мгновенное,
- при устранении дефекта в П не вносится новый дефект,
- дефекты различных типов в П проявляются одинаково,
- распределение длительности интервалов времени экспоненциальное,

– параметр закона распределения изменяется так, чтобы П улучшалась.

На рис. 4.6 показана реализация процесса изменения числа ошибок в П и длительности интервалов времени между ошибками.

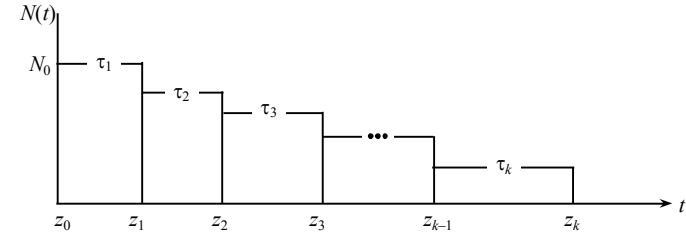


Рис. 4.6

Каждая ступенька на рисунке означает уменьшение числа ошибок в П на одну. Длительность интервалов для  $i = 1, 2, \dots, k$  будет равна  $\tau_i = z_i - z_{i-1}$ , а число ошибок на  $i$ -м интервале –  $(N_0 - i + 1)$ . Предположим, что интенсивность проявления одной ошибки равна  $\eta$ . Тогда интенсивность возникновения ошибок примет вид:

$$\lambda(i) = \begin{cases} N_0 \eta, & i = 1, \\ (N_0 - i + 1) \eta, & 2 \leq i \leq N_0, \\ 0, & i > N_0. \end{cases} \quad (4.45)$$

Плотности вероятности для данного случая будут представлены выражением:

$$w(t_i) = (N_0 - i + 1) \eta e^{-(N_0 - i + 1) \eta t_i}. \quad (4.46)$$

Составим функцию правдоподобия:

$$L(N_0, \eta) = \prod_{i=1}^k w(t_i), \quad (4.47)$$

которая после раскрытия примет вид:

$$L(N_0, \eta) = \eta^k \prod_{i=1}^k (N_0 - i + 1) e^{-\eta \sum_{i=1}^k (N_0 - i + 1) \tau_i}. \quad (4.48)$$

Прологарифмировав (4.44), взяв производные от логарифма по  $N_0$  и  $\eta$  и приравняв их нулю, получим систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(N_0 - i + 1)} - \eta \sum_{i=1}^k (N_0 - i + 1) \tau_i = 0, \\ \frac{k}{\eta} - \sum_{i=1}^k (N_0 - i + 1) \tau_i = 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

Введём обозначения  $\sum_{i=1}^k \tau_i = A$ ,  $\sum_{i=1}^k i \tau_i = B$ . С учётом этих обозначений система (4.49) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(N_0 - i + 1)} - \eta A = 0, \\ \frac{k}{\eta} - (N_0 + 1)A + B = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Решение этой системы уравнений с целью нахождения оценок параметров  $\tilde{N}_0$ ,  $\tilde{\eta}$  можно выполнить численно. Здесь для иллюстрации мы приведём решение системы уравнений в среде Mathcad.

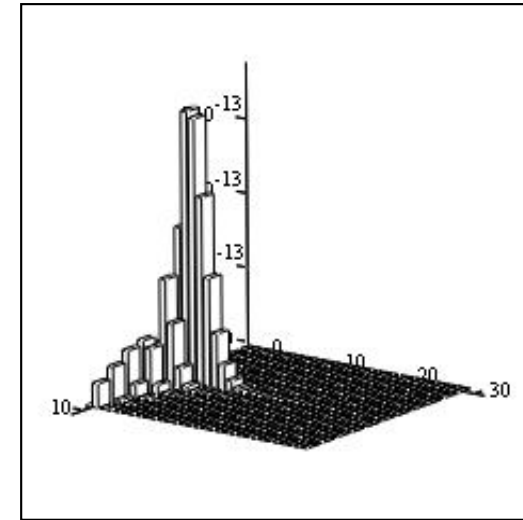
**Пример 4.1.** При испытании некоторой П зафиксированы и устранены 5 ошибок со следующими длительностями интервалов между ошибками: 10, 15, 50, 200, 800 ч. Обозначим  $x = \tilde{N}_0$ ,  $y = \tilde{\eta}$ . Представим (4.48) в виде  $Z(x, y) := Y(x, y)X(x, y)$ , где

$$X(x, y) := e^{-y \sum_{i=1}^k (x-i+1) \tau_i}, \quad Y(x, y) := y^k \prod_{i=1}^k (x-i+1). \quad (4.51)$$

Для выполнения решения введём обозначения:  $k := 5$ ,  $i := 1 \dots 10$ ,  $j := 0 \dots 30$ ,  $x_i := i$ ,  $y_j := j$ ,  $M_{i,j} := Z(x_i, y_j)$ , а также запишем задание длительностей интервалов между ошибками в виде столбца:

$$\tau := \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \\ 50 \\ 200 \\ 800 \end{bmatrix}.$$

Выберем для представления решения график 3D-полос и форму гистограммы. Результат решения показан на рис. 4.7.



М

Рис. 4.7

Из графика, представленного в укрупнённом виде, можно определить искомые оценки параметров модели:  $\tilde{N} \approx 5$ ,  $\tilde{\eta} \approx 0,98 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$ . ▲

Условие (4.49) является необходимым, но не достаточным для достижения максимума функции правдоподобия. Для определения характера экстремума нужно исследовать вторые производные функции.

Решение системы нелинейных уравнений (4.50) может быть получено одним из численных методов, например, методом Ньютона. При этом для задания начальных значений оценок параметров необходимо учесть, что  $k \leq N_0$ . Можно принять  $\tilde{N}_0 = k$ , а за значение  $\tilde{\eta}$  взять значение, полученное из решения любого уравнения (4.51). При поиске корней уравнения приращение  $\Delta N$  необходимо задавать достаточно малым, чтобы не пропустить ре-

шение. В некоторых случаях невязка при решении системы может иметь колебательный характер. В результате, может быть несколько корней. В качестве решения необходимо выбрать то значение  $\tilde{N}_0$  и соответствующее ему значение  $\tilde{\eta}$ , которое наиболее близко к значению  $k$ .

Для получения большей информации о параметрах можно найти асимптотические оценки дисперсий параметров и коэффициент корреляции между оценками параметров. Для этого используются следующие формулы:

$$Var(\tilde{N}_0) \approx k/\eta^2 D, \quad Var(\tilde{\eta}) \approx S_2/D, \quad \rho(\tilde{N}_0, \tilde{\eta}) = -A\eta/[kS_2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.52)$$

в которых  $D = kS_2/\eta^2 - A^2$ ,  $S_2 = \sum_{i=1}^k (N_0 - i + 1)^{-2}$ . Величина

$A = \sum_{i=1}^k \tau_i$  была определена ранее и использована в системе уравнений (4.50).

Выражения (4.52) получены с помощью следующей матрицы производных:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial N^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial N \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta \partial N} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta^2} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

в которой записаны частные производные 2-го порядка от логарифма функции правдоподобия по параметрам  $N$ ,  $\eta$ . Ковариационная матрица – матрица дисперсий и ковариации – получается из (4.53) по правилу  $K = -M^{-1}$ , то есть она равна матрице, обратной  $M$ , с обратным знаком:

$$K = \begin{bmatrix} Var \hat{N} & Cov(\hat{N}, \hat{\eta}) \\ Cov(\hat{\eta}, \hat{N}) & Var \hat{\eta} \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Коэффициент корреляции параметров  $\hat{N}$ ,  $\hat{\eta}$  находится по формуле:

$$\rho(\hat{N}, \hat{\eta}) = \frac{Cov(\hat{N}, \hat{\eta})}{\sqrt{Var \hat{N}} \cdot \sqrt{Var \hat{\eta}}}. \quad (4.55)$$

Применяя выражения (4.53)–(4.55), в условиях нашего примера получим (4.52), а подставляя значения указанных там величин, найдём следующие оценки:

$$Var(\tilde{N}_0) \cong 0,805, \quad Var(\tilde{\eta}) \cong 2,267 \cdot 10^{-7}, \quad \rho(\tilde{N}_0, \tilde{\eta}) \cong -0,389. \quad (4.56)$$

При использовании метода максимального правдоподобия полагалось, что  $N$  непрерывная величина. Поэтому получаемая при решении оценка  $\tilde{N}$  должна быть целочисленной. Для принятия решения о том, какое ближайшее целое значение следует брать, большее или меньшее  $\tilde{N}$ , в качестве окончательного решения, целесообразно проанализировать значение функции правдоподобия. При этом величина  $\tilde{\eta}$ , как и ранее, должна определяться с помощью решения уравнений правдоподобия.

Для проверки адекватности выбранной модели П реальным статистическим данным можно рекомендовать сравнение кривых, характеризующих реальную наработку П с её расчётным значением. Также можно проанализировать сходимость или близость двух графиков с помощью критериев сходимости. В этом случае достоверность и точность полученных результатов можно оценить выражением:

$$L(N, \eta) - L(\tilde{N}, \tilde{\eta}) = 0,5\chi_{2,\alpha}^2, \quad (4.57)$$

в котором  $N$ ,  $\eta$  – параметры модели,  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{\eta}$  – переменные величины, а  $\chi_{2,\alpha}^2$  – величина расхождения по Хи-квадрат с вероятностью  $\alpha$  и двумя степенями свободы. Если для выбранной модели П результаты проверки адекватности окажутся неудовлетворительными, тогда необходимо для анализа надёжности П использовать иную модель процесса функционирования П.

Обратимся к формуле (4.40), которая устанавливает вероятность того события, когда все ошибки П будут устранены за заданное время  $t_3$ . Очевидно, что в качестве начального значения времени  $t_3$  можно брать следующее:

$$t_3 = \sum_{i=1}^k \tau_i. \quad (4.58)$$

Для этого времени значение вероятности  $P_{\geq N}(t_3)$  будет характеризовать вероятность устранения всех ошибок П в условиях

использования её за заданное время испытаний или эксплуатации. Однако, после получения оценок параметров модели  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{\eta}$  формулу (4.58) необходимо уточнить, а именно, число ошибок  $k$  следует увеличить на величину  $3\sqrt{Var(\tilde{N})}$ , которая в соответствии с нормальным законом вероятностей практически гарантирует устранение всех возможных ошибок П. Поэтому необходимо определять время испытаний или эксплуатации П из условия:

$$P_{\geq N}(t_3 + 3\sqrt{Var(\tilde{N})}\tau_k) \geq P_{\text{тр}}, \quad (4.59)$$

где  $P_{\text{тр}}$  – требуемое значение вероятности устранения всех ошибок П при установленной системе её использования. Из этой формулы следует, что три среднеквадратических отклонения нужно умножить на максимальную величину интервала между ошибками П. Определение потребного времени испытаний П из (4.59) представляет решение обратной задачи. Эта задача может решаться графически. Её можно также решить в среде Mathcad, применив процедуру отыскания аргумента (4.59). В среде Mathcad, используя процедуру root для решения уравнения (4.40), которое принимает вид

$$P_{\geq \tilde{N}}(t_3) = 1 - \tilde{N} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} (-1)^{\tilde{N}-i} \frac{C_{\tilde{N}-1}^{i-1}}{\tilde{N}-i+1} e^{-\eta t_3}, \quad (4.60)$$

в условиях нашего примера для различных значений вероятности  $P_{\text{тр}}$  получим длительности времени испытаний П в часах  $t_3$ , когда наблюдается полное устранение ошибок (табл. 4.1).

Т а б л и ц а 4.1

$P_{\text{тр}}$	0,970	0,980	0,990	0,995	0,999	1,000
$t_3$	3578	3992	4699	5406	7049	36860

Покажем, насколько сильно влияет согласно выражению (4.59) учёт величины  $3\sqrt{Var(\tilde{N})}\tau_k$  на продолжительность времени испытаний с целью устранения всех ошибок в П. Для нашего примера получаем:  $3\sqrt{Var(\tilde{N})}\tau_k = 3\sqrt{0,805} \cdot 800 = 2153$  ч. Поэто-

му принятие во внимание величины дисперсии случайной величины  $\tilde{N}$  существенно для определения длительности испытаний.

Выражения для расчёта показателей надёжности П имеют следующий вид.

1. Условная вероятность безошибочного функционирования П в течение времени  $t$  после устранения в ней  $k$  ошибок равна:

$$P(t/k) = \exp[-\lambda(k)t]. \quad (4.61)$$

2. Условная функция распределения времени до очередной ошибки за время  $t$  после устранения в П  $k$  ошибок:

$$Q(t/k) = 1 - \exp[-\lambda(k)t]. \quad (4.62)$$

3. Плотность распределения времени безошибочного функционирования П при условии, что в ней устранено  $k$  ошибок:

$$a(t/k) = \lambda(k) \exp[-\lambda(k)t]. \quad (4.63)$$

4. Среднее время безошибочного функционирования при условии устранения  $k$  ошибок в П:

$$T(k) = [\lambda(k)]^{-1}. \quad (4.64)$$

5. Среднее время, за которое могут быть устранены все ошибки П:

$$T_n = \frac{1}{\tilde{\eta}} \sum_{i=1}^N (i)^{-1}. \quad (4.65)$$

Расчёт значений этих показателей можно выполнить после определения  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{\eta}$  по имеющимся экспериментальным данным по отладке и тестированию П.

**Пример 4.2.** Пусть время непрерывного функционирования П равно  $t = 100$  ч, а значения оценок параметров  $\tilde{N} = 5$ ,  $k = 5$ ,  $\tilde{\eta} = 0,98 \cdot 10^{-3}$  ч<sup>-1</sup>. Тогда, без учёта  $Var \tilde{N}$   $P(100/5) = \exp[-0,98 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2] = 0,902$ ;  $Q(100/5) = 0,098$ ;  $T(5) = 1020$  ч;  $T_n = 2330$  ч. ▲

Рассмотрим возможную модификацию модели. На рис. 4.6 была представлена кусочно-непрерывная реализация процесса изменения числа ошибок в П. Она имеет явную тенденцию убывания числа ошибок. Такую же тенденцию имеет величина интенсивности ошибок в зависимости от времени отладки или тестирования П. Поэтому интенсивность проявления ошибок может быть

аппроксимирована непрерывной функцией в зависимости от времени. Этой аппроксимации будет отвечать определённое распределение вероятностей времени проявления ошибки П. Из всех распределений, удовлетворяющих данному требованию, наиболее простым будет гиперэкспоненциальное распределение, состоящее из двух экспоненциальных распределений. Это распределение с переменной во времени интенсивностью, на наш взгляд, может отражать произвольный закон распределения времени между наблюдаемыми последовательными ошибками П в отличие от рассматриваемого экспоненциального. А это, в свою очередь, означает, что можно рассматривать показатели надёжности П при менее жёстких ограничениях для процесса проявления ошибок. Можно применять показатели надёжности не в дискретном, а в непрерывном представлении, использовать более удобный механизм условных вероятностей, понятие статистического ресурса по Н.М. Седакину и учитывать другие свойства П. Конечно, подобная аппроксимация дискретного процесса непрерывным является приближённой и неизбежно связана с определенной погрешностью. В случае необходимости погрешность можно оценить и учесть.

Итак, пусть плотность вероятности времени до ошибки может быть представлена как:

$$a(t) = C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad C_1 + C_2 = 1, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0. \quad (4.66)$$

Определим параметры плотности, пользуясь численными данными аппроксимации ступенчатой кривой числа ошибок. Составим систему из двух уравнений при известных начальной, конечной интенсивности ошибки и среднего времени наблюдения  $\tilde{N} = 5$  ошибок. Первое уравнение  $C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = \nu$ , второе уравнение

$$\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} = T. \quad \text{Величина } \nu = \left( \tilde{N} + 3\sqrt{\text{Var } \tilde{N}} \right) \tilde{\eta} = 0.0075 \text{ ч}^{-1}, \text{ а}$$

$\lambda_2 = 3\sqrt{\text{Var } \tilde{N}} \tilde{\eta} = 0,0026$ . В качестве значения  $T$  примем  $T = 206,26$  ч. Тогда после решения системы уравнений получим:  $C_1 = 0,671$ ,  $C_2 = 0,329$ ,  $\lambda_1 = 0,0097$ ,  $\lambda_2 = 0,0026$ . На рис. 4.8 показаны графики плотности вероятности, вероятности отсутствия ошибки и интенсивность её появления в П.

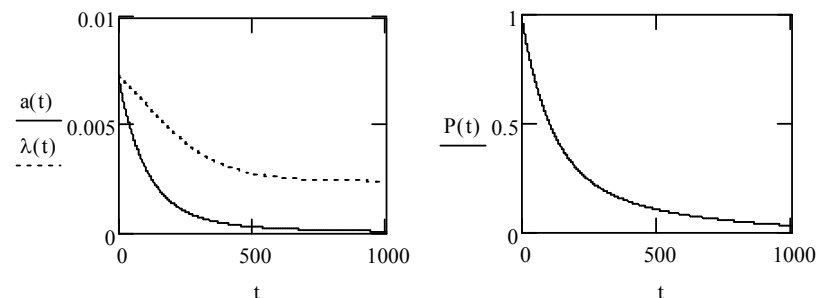
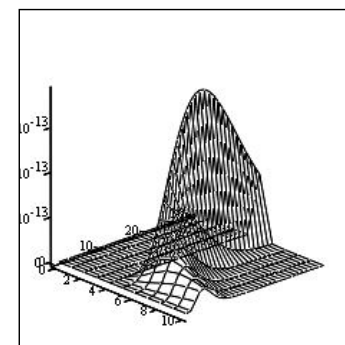


Рис. 4.8.

**Обобщение модели.** Известно следующее обобщение рассматриваемой модели Уолвертоном и Шиком. В нём интенсивность ошибок П пропорциональна не только количеству ошибок в ней, но и времени отладки. При этом вероятность обнаружения и устранения ошибок возрастает с течением времени.

**Примечание.** В модели предполагалось, что ошибка П обнаруживается и исправляется с вероятностью единица. Если вероятность обнаружения и исправления ошибки будет равна  $p \neq 1$ , то в уравнениях для определения оценок  $\tilde{N}$ , и  $\tilde{\eta}$  следует положить вместо  $\eta$  величину  $\eta \cdot p$ . На рис. 4.9 показано графическое решение уравнений для случая, когда  $p = 0.2$ . Величина оценки  $\tilde{N}$  не изменяется, а величина оценки  $\tilde{\eta}$  возрастает в пять раз.



М

Рис. 4.9

Одна рекомендация, полезная при использовании модели. Система уравнений (4.49) может быть приведена к одному уравнению:

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{N-i+1} = \frac{k \sum_{i=1}^k \tau_i}{(N+1) \sum_{i=1}^k \tau_i - \sum_{i=1}^k i \tau_i} = \frac{k}{(N+1) - \frac{B}{A}}. \quad (4.49')$$

Это уравнение можно записать в виде:

$$a_k(N+1) = b_k \left( N+1, \frac{B}{A} \right), \quad (4.49'')$$

в котором  $a_k(m) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{m-i}$ ;  $b_k(m) = \frac{k}{m - \frac{B}{A}}$ ;  $m = N+1$ ;  $\frac{B}{A} = \frac{\sum_{i=1}^k i \tau_i}{\sum_{i=1}^k \tau_i}$ .

Так как имеет смысл рассматривать лишь целые значения  $N$ , функции (4.49'') можно рассматривать только для целых аргументов. Кроме того, надо полагать  $m \geq k+1$ , так как  $k$  ошибок в П уже обнаружено и исправлено. Таким образом, оценка для  $N$  может быть получена с помощью пошагового вычисления функций  $a_k(m)$ ,  $b_k(m)$  для  $m = k+1, k+2, \dots$  и определения разности  $|a_k(m) - b_k(m)|$ . Так как левая и правая части формулы (4.49'') одинаково монотонны, то это порождает возможность единственности решения, а также возможность существования решения. Известно, что конечное решение для  $N$  в области  $N \geq k$  существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{\sum_{i=1}^k (i-1) \tau_i}{\sum_{i=1}^k (i-1)} > \frac{\sum_{i=1}^k \tau_i}{k}. \quad (4.49''')$$

В противном случае оценка максимального правдоподобия для  $N$  будет  $N = \infty$ .

Отметим, что вместо  $\tau_i$  в этих формулах можно использовать и  $h_i$  – число прогонов П между смежными ошибками  $i-1$  и  $i$ . Приведём пример использования модели по эксперименталь-

ным данным [26]. В течение 250 дней было обнаружено 26 ошибок П, интервалы между ними представлены в табл. 4.2, а значения функций – в табл. 4.3.

Т а б л и ц а 4.2

№	$\tau_i$	№	$\tau_i$	№	$\tau_i$	№	$\tau_i$
1	9	8	8	15	4	22	33
2	12	9	5	16	1	23	7
3	11	10	7	17	3	24	91
4	4	11	1	18	3	25	2
5	7	12	6	19	6	26	1
6	2	13	1	20	1		
7	5	14	9	21	11		

Т а б л и ц а 4.3

$m$	$a_k(m)$	$b_k(m)$	$a_k(m) - b_k(m)$
27	3,854	2,608	1,246
28	2,891	2,371	0,520
29	2,427	2,172	0,255
30	2,128	2,005	0,123
31	1,912	1,861	0,051
32	1,744	1,737	0,007

Имеем  $k = 26$ ,  $A = 250$ ,  $B = 4258$ ,  $B/A = 17,032$ .

Условие (4.49''') выполняется, и, таким образом, оценка является единственной. В табл. 4.2 приведены значения  $m$ ,  $a_k(m)$ ,  $b_k(m)$  для аргументов  $m \geq 27$ , а также разность  $a_k(m) - b_k(m)$ .

Наилучшим решением (4.49'') является  $m = 32$ , так как соответствующая строка таблицы даёт минимальное значение разницы по модулю двух функций, то есть максимально приближает её к нулю. Поэтому  $\tilde{N} = m - 1 = 31$ . Подставляя это значение в одно из уравнений системы (4.49), находим  $\tilde{\eta} = 0,007$ . Среднее время  $\bar{\tau}_{k+1}$ , оставшееся до обнаружения  $(k+1)$  будет равно

$$\bar{\tau}_{27} = \frac{1}{\tilde{\eta}(\tilde{N} - k)} = 29 \text{ дней, а время до полного завершения тести-$$

$$\text{рования } \Pi - t_k = \sum_{i=27}^{31} \tau_i = \frac{1}{\tilde{\eta}} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i} = 326 \text{ дней.}$$

**Обобщение моделей Седякина-Джелинского-Моранды и Уолвертона-Шика.** Сущность рассматриваемого обобщения состоит в том, что допускается возможность возникновения на интервале времени более одной ошибки. Также предполагается, что исправление ошибок производится лишь после окончания того интервала времени, на котором они произошли. Наблюдаемым событием является не время до возникновения ошибки, а число ошибок, обнаруженных на интервале времени. Предполагается,



что все обнаруженные на определённом интервале времени ошибки устраняются перед результирующим прогоном. Вид уравнений для нахождения оценок  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{\eta}$  аналогичен рассмотренному случаю. Приведём результаты решения уравнений. Сами уравнения принимают вид:

$$\frac{K}{N+1-K\theta} = \sum_{i=1}^M \frac{M_i}{N-n_{i-1}}, \quad \eta = \frac{K/A}{N+1-K\theta}, \quad (4.67)$$

где 
$$A = \begin{cases} \sum_{i=1}^M t_i, \\ \sum_{i=1}^M t_i(T_{i-1} + t_i/2); \end{cases} \quad B = \begin{cases} \sum_{i=1}^M (n_{i-1} + 1)t_i, \\ \sum_{i=1}^M (a_{i-1} + 1)t_i(T_{i-1} + t_i/2). \end{cases} \quad (4.68)$$

В (4.68) первые строки соответствуют модели Седякина-Джелинского-Моранды, а вторые – модели Уолвертона-Шика. В приведённых выражениях обозначено:  $t_i$  – интервал времени, в котором наблюдается  $M_i$  ошибок;  $T_{i-1}$  – время, накопленное за  $(i-1)$  интервалов:  $T_{i-1} = \sum_{j=1}^i t_j$ ,  $T_0 = 0$ ;  $n_{i-1}$  – суммарное число ошибок, обнаруженных за время от первого до  $(i-1)$ -го интервала включительно:  $n_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} M_j$ ,  $n_0 = 0$ ;  $M$  – общее число временных интервалов;  $K = \sum_{i=1}^M M_i = n_M$  – суммарное число обнаруженных ошибок;  $\theta = B/AK$ . При  $M=1$  уравнения (4.67) принимают прежний вид. В этом случае  $M=K$ , что соответствует числу интервалов  $k$  а  $n_{i-1} = i-1$ . Изменяется только выражение для  $S_2$ , которое принимает вид  $\sum_{i=1}^M M_i / (N - n_{i-1})^2$ .

**Модель Ямады-Охбы-Осаки.** Является моделью «роста надёжности» с неоднородным пуассоновским процессом проявления ошибок  $\Pi$  от времени. Эта модель характеризуется  $S$ -образной зависимостью числа ошибок от времени отладки и тестирования.

Она строится на основе полученных экспериментальных данных. Качественно  $S$ -образную зависимость числа зафиксированных ошибок от времени можно объяснить тем, что в процессе тестирования и отладки повышается степень знакомства программистов как с тестируемой  $\Pi$ , так и с используемыми для этого средствами, в результате чего после относительно медленного нарастания числа фиксированных ошибок на начальной фазе тестирования наступает период их интенсивного обнаружения. После того, как большая часть ошибок будет выявлена и устранена, наступает заключительная фаза относительно медленного выявления немногих оставшихся ошибок.

В модели предполагается, что фиксированные ошибки устраняются мгновенно и безошибочно.

Вероятность того, что к моменту времени  $t$  будет зафиксировано  $N(t)$  ошибок, описывается пуассоновским случайным процессом со средним значением, определяемым как

$$M(t) = a[1 - (1 + bt)e^{-bt}], \quad (4.69)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые положительные величины.

Интенсивность возникновения ошибки определяется как<sup>1</sup>

$$\lambda(t) = \frac{dM(t)}{dt} = ab^2te^{-bt}. \quad (4.70)$$

Вводится нормированная интенсивность ошибки:

$$\lambda_n(t) = \frac{dM(t)}{dt} / [a - M(t)] = \frac{b^2}{1 + bt}. \quad (4.71)$$

На наш взгляд, величина интенсивности ошибки  $\lambda(t)$ , должна определяться не как указано в формуле (4.71), а на основании решения соответствующего интегрального уравнения теории вос-

<sup>1</sup> **Примечание автора.** По существу мы имеем дело с процессом мгновенного устранения ошибок, что означает – рассматриваемая величина в (4.70) на самом деле является параметром потока ошибок и ей должно соответствовать определённое уравнение теории восстановления. Поэтому в дальнейшем вместо обозначения  $\lambda(t)$  введём принятое в отечественной литературе обозначение параметра потока отказов аппаратуры –  $\omega(t)$ :

$$\omega(t) = \frac{dM(t)}{dt} = ab^2te^{-bt}.$$

становления:  $\lambda(t) = \frac{a(t)}{P(t)}$ , при этом  $a(t)$  находится из уравнения

$$\omega(t) = a(t) + \int_0^t \omega(\tau)a(t-\tau)d\tau, \text{ а вероятность безошибочного функ-}$$

ционирования  $\Pi$  находится как  $P(t) = \int_t^\infty a(z)dz$ . Но в дальнейшем

мы сохраним принятые обозначения авторов модели [75].

Величина  $\lambda_n(t)$  означает долю числа зафиксированных ошибок в единицу времени, отнесённую к числу ошибок, не выявленных к данному моменту времени  $t$ .

Модель имеет два параметра:  $a$  – число невыявленных ошибок в начальный момент времени,  $b$  – постоянную времени, определяющую интенсивность их проявления. Для конкретной совокупности экспериментальных данных значения этих параметров определяются исходя из критерия максимума логарифмической функции правдоподобия  $\ln L$ . При этом предполагается, что наблюдаются данные по совокупному числу ошибок  $y_k$ , зафиксированных в данном интервале  $(0, t_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Для функции записывается следующее выражение:

$$\ln L = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \ln a + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \ln[(1 + bt_{k-1})e^{-bt_{k-1}} - (1 + bt_k)e^{-bt_k}] - \sum_{k=1}^n \ln[(y_k - y_{k-1})!] - a(1 - (1 + bt_n)e^{-bt_n}). \quad (4.72)$$

Дифференцируя это выражение по параметрам  $a$ ,  $b$  и приравнявая значения производных нулю, численно находят оценки этих параметров по критерию максимального правдоподобия.

Для проверки модели использовались экспериментальные данные, полученные при отладке системы управления терминалами [74]. Программное обеспечение системы содержало 3000 строк текста на структурном макроассемблере. В процессе 10-дневного тестирования была выявлена и устранена 31 ошибка. С помощью данной модели на основе максимизации функции правдоподобия были получены следующие значения оценок па-

раметров:  $\tilde{a} = 37,9$ ;  $\tilde{b} = 0,312$ . Были построены аппроксимирующая и экспериментальная кривые, а также доверительные границы 90%-го доверительного интервала в координатах – время испытаний в днях, суммарное число отказов. Они показали приемлемую точность аппроксимации.

После определения значений параметров  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  ожидаемое число необнаруженных на момент времени  $t$  ошибок,  $n(t)$  и вероятность безошибочной работы программной системы в течение времени  $t$  при условии, что последняя ошибка была зафиксирована в момент времени  $\tau$ ,  $p(t, \tau)$ , определяются по формулам:

$$n(t) = E\{N(\infty) - N(t)\} = a(1 + bt)e^{-bt}; \quad (4.73)$$

$$p(t, \tau) = \exp[-\{M(t + \tau) - M(\tau)\}] = \exp[-ae^{-b\tau}\{(1 + b\tau) - (1 + b(t + \tau))e^{-bt}\}], \quad (4.74)$$

где  $E$  – символ математического ожидания.

**Примечание.** Оценки максимального правдоподобия обычно сходятся к нормальному распределению при увеличении объёма выборки. Так, если  $\tilde{a}$  – оценка максимального правдоподобия

$a$  при объёме выборки  $n$  и  $\zeta \equiv \frac{\tilde{a} - a}{\sqrt{\text{Var } \tilde{a}}}$ , то

$$P(\zeta \leq x) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz \quad (*)$$

при  $n$ , стремящемся к бесконечности. Пусть  $\gamma$  – установленный доверительный уровень. Требуется найти интервал значений  $a$ , границы которого  $a_1$  и  $a_2$  являются функциями выборочных значений (то есть  $a_1$ ,  $a_2$  – случайные величины) и который обладает тем свойством, что

$$P(a_1 < a < a_2) = \gamma, \quad (**)$$

каково бы ни было истинное значение  $a$ . Тогда в силу (\*)

$$P\left(-K_{(1-\gamma)/2} < \frac{\tilde{a} - a}{\sqrt{\text{Var } \tilde{a}}} < K_{(1-\gamma)/2}\right) \cong \gamma, \quad (***)$$

то есть  $K_\alpha$  определяется уравнением

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_\alpha}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = 1 - \Phi(K_\alpha)$$

и является «нормальным уклоном, которое превосходит с вероятностью  $\alpha$ ». Оценка  $Var \tilde{a}$  является функцией  $a$  и других параметров. Заменим эти параметры их оценками и обозначим получаемую оценку через  $V$ . Тогда событие в скобках левой части (\*\*\*) приближённо эквивалентно событию

$$(\tilde{a} - K_{(1-\lambda)/2} \sqrt{V} < a < \tilde{a} + K_{(1-\gamma)/2} \sqrt{V}).$$

Таким образом,  $a$  принадлежит интервалу  $\tilde{a} \pm K_{(1-\gamma)/2} \sqrt{V}$  с вероятностью, приближённо равной  $\gamma$ . Кстати, в уравнении (\*\*\*) можно брать любую пару  $K_{\varepsilon_1}$  и  $K_{\varepsilon_2}$  с тем условием, что  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1 - \gamma$ .

**Модель Ямада-Нарихиса-Охтера.** В данной модели  $N(t)$  означает число ошибок П, зафиксированных к моменту времени  $t$  в процессе его отладки. Ошибки делятся на два вида. К ошибкам первого вида относятся легко обнаруживаемые ошибки. К ошибкам второго вида относятся трудно обнаруживаемые ошибки. Модель ошибок строится на неоднородном пуассоновском процессе:

$$P\{N(t) = n\} = \frac{\{M(t)\}^n}{n!} \exp\{-M(t)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.75)$$

$$M(t) = a \sum_{i=1}^2 p_i (1 - e^{-b_i t}); \quad a > 0, \quad 0 < b_2 < b_1 < 1, \quad (4.76)$$

где  $a$  – среднее ожидаемое число ошибок в П;  $b_i$  – интенсивность проявления ошибок  $i$ -го вида во время отладки;  $p_i$  – доля числа ошибок  $i$ -го вида в общем числе ошибок,  $p_1 + p_2 = 1$ ,  $M(t)$  – среднее число ошибок, зафиксированных за время  $t$ .

Интенсивность возникновения ошибок определяется по формуле:

$$\lambda(t) = \frac{dM(t)}{dt} = a \sum_{i=1}^2 p_i b_i e^{-b_i t}. \quad (4.77)$$

Она означает ожидаемое число ошибок за единицу времени в момент  $t$ . В соответствии с примечанием к предыдущей модели эта величина есть параметр потока ошибок  $\omega(t) = \frac{dM(t)}{dt} = a \sum_{i=1}^2 p_i b_i e^{-b_i t}$  в рассматриваемом процессе восстановления. А нормированная интенсивность ошибок, называемая иногда коэффициентом проявления ошибок, и определяемая зависимостью:

$$\lambda_n(t) = \lambda(t) / (a - M(t)) = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i p_i e^{-b_i t}}{p_1 e^{-b_1 t} + p_2 e^{-b_2 t}}, \quad (4.78)$$

на самом деле и является интенсивностью ошибки и обозначается как  $\lambda(t)$ . Сохраняя обозначения авторов модели, при этом  $\lambda_n(0) = p_1 b_1 + p_2 b_2$ ,  $\lambda_n(\infty) = b_2$ . Число ошибок, оставшихся в П за время  $t$ , равно:

$$R(t) = a - M(t) = a \sum_{i=1}^2 p_i e^{-b_i t}. \quad (4.79)$$

Вероятность безошибочного функционирования П за время  $t$  при условии, что последняя ошибка была зафиксирована в момент  $\tau$  определяется выражением:

$$P(t, \tau) = \exp\left[-a \sum_{i=1}^2 p_i \{e^{-b_i \tau} - e^{-b_i(t+\tau)}\}\right]. \quad (4.80)$$

Оценки значений параметров определяются по критерию максимума логарифмической функции правдоподобия, принимающей в данном случае вид:

$$\ln L = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \ln a + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) \ln \left[ \sum_{i=1}^2 p_i (e^{-b_i t_{k-1}} - e^{-b_i t_k}) \right] - a \sum_{i=1}^2 p_i (1 - e^{-b_i t_n}) - \sum_{k=1}^n \ln[(y_k - y_{k-1})!], \quad (4.81)$$

где  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ . При условии  $0 < b_2 < b_1$  оценки значений параметров  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}_i$  определяются в результате численного решения системы уравнений:

$$y_n = a \sum_{i=1}^2 p_i (1 - e^{-b_i t_n}); \quad (4.82)$$

$$at_n e^{-b_j t_n} = \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - y_{k-1})(t_k e^{-b_j t_k} - t_{k-1} e^{-b_j t_{k-1}})}{\left\{ \sum_{i=1}^2 p_i (e^{-b_i t_{k-1}} - e^{-b_i t_k}) \right\}}, \quad j=1, 2. \quad (4.83)$$

Если  $n$  достаточно большое, оценки значений параметров подчиняются асимптотически нормальному распределению. Точность оценок значений параметров модели можно характеризовать дисперсиями, получаемыми из матрицы дисперсий-ковариаций. Эта матрица обычно получается путём инверсии информационной матрицы Фишера:

$$F = \begin{vmatrix} Iaa & Iab_1 & Iab_2 \\ Ib_1a & Ib_1b_1 & Ib_1b_2 \\ Ib_2a & Ib_2b_1 & Ib_2b_2 \end{vmatrix}. \quad (4.84)$$

Значения элементов матрицы следующие:

$$Iaa = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^2 p_i (1 - e^{-b_i t_n}); \quad (4.85)$$

$$Ib_1b_1 = a \sum_{k=1}^n \frac{p_1^2 (t_k e^{-b_1 t_k} - t_{k-1} e^{-b_1 t_{k-1}})^2}{\left\{ \sum_{i=1}^2 p_i (e^{-b_i t_{k-1}} - e^{-b_i t_k}) \right\}^2}; \quad (4.86)$$

$$Iab_1 = Ib_1a = p_1 t_n e^{-b_1 t_n}; \quad (4.87)$$

$$Ib_2b_2 = a \sum_{k=1}^n \frac{p_2^2 (t_k e^{-b_2 t_k} - t_{k-1} e^{-b_2 t_{k-1}})^2}{\left\{ \sum_{i=1}^2 p_i (e^{-b_i t_{k-1}} - e^{-b_i t_k}) \right\}^2}; \quad (4.88)$$

$$Iab_2 = Ib_2a = p_2 t_n e^{-b_2 t_n}; \quad (4.89)$$

$$Ib_1b_2 = Ib_2b_1 = a \sum_{k=1}^n \frac{p_1 p_2 (t_k e^{-b_1 t_k} - t_{k-1} e^{-b_1 t_{k-1}})(t_k e^{-b_2 t_k} - t_{k-1} e^{-b_2 t_{k-1}})}{\left\{ \sum_{i=1}^2 p_i (e^{-b_i t_{k-1}} - e^{-b_i t_k}) \right\}^2}. \quad (4.90)$$

Используя асимптотические свойства оценок и приведённые значения коэффициентов, можно получить точечные и интервальные оценки величин показателей  $R(t)$  по (4.79) и  $P(t, \tau)$  по (4.80).

В качестве примера авторами модели был использован ряд тестовых данных, представленных в форме  $(t_k, y_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

12 мес. На основе численного решения уравнений (4.82), (4.83) были получены следующие оценки:

$$\tilde{a} = 3266,4; \tilde{b}_1 = 0,1467; \tilde{b}_2 = 0,0953. \quad (4.91)$$

Оценённое среднее значение функции при  $p_1 = 0,9$ ,  $p_2 = 0,1$  имеет вид:

$$\tilde{M}(t) = 3266,4[0,9(1 - e^{-0,1467t}) + 0,1(1 - e^{-0,0953t})]. \quad (4.92)$$

Достаточная точность проиллюстрирована авторами в виде графиков для  $\tilde{M}(t)$  и 90%-х доверительных границ. Нормированная интенсивность  $\lambda_H(t)$  ошибки имеет вид выпуклой монотонно убывающей кривой. На основе критерия согласия Колмогорова-Смирнова показано, что с 5%-м уровнем значимости данная модель соответствует тестовым данным. По выражениям (4.85)–(4.90) были получены следующие оценки дисперсий значений параметров и коэффициентов корреляции между соответствующими двумя параметрами модели:

$$D(\tilde{a}) = 238868,7; D(\tilde{b}_1) = 0,00132; D(\tilde{b}_2) = 0,23727; \quad (4.93)$$

$$\rho(\tilde{a}, \tilde{b}_1) = 0,9520; \rho(\tilde{a}, \tilde{b}_2) = -0,9864; \rho(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = -0,9834.$$

С использованием (4.79), (4.80), (4.93) получены графики для  $R(t)$ ,  $P(t, \tau)$  и доверительные границы при доверительной вероятности 0,9.

В заключение рассматривается вопрос об определении необходимого времени отладки программного модуля или продолжительности его испытаний. При определении этого времени исходят либо из условия минимизации общей стоимости модуля за время его жизни, либо из условия обеспечения требуемой вероятности безошибочного функционирования модуля в течение заданного времени.

Пусть цена обнаруженной ошибки в процессе проверки модуля равна  $C_1$ , цена ошибки в процессе его функционирования –  $C_2$ , а цена проверки модуля в единицу времени –  $C_3$ , причём  $C_2 > C_1 > 0$ . Тогда общая стоимость использования модуля в зависимости от времени будет равна:

$$C(\tau, t_H) = C_1 M(\tau) + C_2 \{M(t_H) - M(\tau)\} + C_3 \tau. \quad (4.94)$$

В выражении (4.94)  $\tau$ ,  $t_{ц}$  – продолжительности отладки и жизненного цикла модуля.

Для рассматриваемых тестовых данных и при  $C_1=1$ ,  $t_{ц}=100$  были получены значения для  $\tau$ , приведённые в табл. 4.4.

Т а б л и ц а 4.4

$C_3$	10					20				
$C_2$	2	5	10	50	100	2	5	10	50	100
$\tau$	7,4	37,9	44,3	58,3	66,0	22,3	32,6	38,8	52,4	58,4
$C_3$	30					100				
$C_2$	2	5	10	50	100	2	5	10	50	100
$\tau$	19,4	29,6	35,7	49,1	54,9	10,8	20,7	26,6	39,5	45,0

При условии обеспечения требуемой вероятности безошибочного функционирования программного модуля в течение заданного времени, пользуясь формулой (4.80), можно записать

$$\min_{\tau} \{P(t, \tau) \geq P_0\}, \quad (4.95)$$

где  $P_0$  – заданная вероятность,  $t$  – требуемая продолжительность безошибочного функционирования модуля,  $\tau$  – продолжительность его отладки. В табл. 4.5 показаны значения  $\tau$ , удовлетворяющие выражению (4.95).

Т а б л и ц а 4.5

$P_0$	0,5					
$t$	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	2,0
$\tau$	13,4	25,0	30,1	42,3	47,6	52,8
$P_0$	0,7					
$t$	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	2,0
$\tau$	18,1	29,9	35,1	47,6	53,0	59,5
$P$	0,9					
$t$	0,01	0,05	0,1	0,5	1,0	2,0
$\tau$	27,0	39,2	44,6	57,8	63,6	69,3

Кроме двух последних моделей могут быть представлены и другие, подобные им, например модель Amrit L, Goel, K. Okumoto «Time-Dependent Error-Detection Rate Model for Software Reliability and other Performance Measures». IEEE Trans. on reliability, v. R-28, № 3. 1979. Однако эти модели отличаются лишь видом зависимости среднего числа ошибок от времени, описываются

также неоднородным пуассоновским процессом и не отличаются существенной новизной.

**Две S-образные модели роста надёжности.** Модели роста надёжности позволяют описывать процесс обнаружения ошибок в П и оценивать её надёжность в зависимости от числа оставшихся в ней ошибок. Они основаны на негомогенном процессе Пуассона. Здесь рассматриваются S-образные модели с запаздыванием и с точкой перегиба. Обсуждаются типы роста надёжности П. Описывается построенный на этих моделях метод оценки качества П на реальных данных.

Кривая накопленного числа обнаруженных ошибок часто имеет S-образную форму. В предложенной модели ошибка определяется как событие, недопустимое для нормального функционирования П. Изменение накопленного числа ошибок зависит от времени. Пусть  $[N(t), t > 0]$  – множество накопленных количеств ошибок, обнаруженных к моменту тестирования  $t$ , и  $H(t)$  функция статистического среднего значения  $N(t)$ . Тогда модель, основанная на негомогенном процессе Пуассона, может быть представлена таким образом:

$$\text{Prob}\{N(t) = n\} = \text{poim}(n; H(t)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.96)$$

Предполагается, что функция  $H(t)$  не убывает и  $H(0) = 0$ ,  $H(\infty) = a$ , где  $a$  – предполагаемое статистически накопленное количество ошибок, которое должно быть обнаружено, то есть статистически предполагаемое начальное количество ошибок в П. В модели с запаздыванием процесс обнаружения ошибки разбивается на два подпроцесса – обнаружение ошибки и локализацию ошибки. При этом

$$H(t) = M(t) = a[1 - (1 + bt)\exp(-bt)], \quad b > 0, \quad (4.97)$$

где  $b$  – частота обнаружения ошибок в установившемся состоянии.

Модель с точкой перегиба, эквивалентна той части модели негомогенного процесса Пуассона, которая описывает явление обнаружения ошибки. В этом случае:

$$H(t) = I(t) = \frac{a[1 - \exp(-bt)]}{[1 + c \exp(-bt)]}, \quad b > 0, c > 0, \quad (4.98)$$

где  $b$  – коэффициент обнаружения ошибки, а  $c$  – постоянная, характеризующая точку перегиба. Параметры моделей могут быть оценены методом максимума правдоподобия.

Рост надёжности  $\Pi$  может быть исследован с помощью частоты обнаружения ошибок, равной в момент времени тестирования  $t$ :

$$d(t) = \frac{dH(t)}{dt} / [a - H(t)]. \quad (4.99)$$

С учётом (4.93) и (4.94) для каждой модели имеем:

$$d(t) = d_M(t) = \frac{b^2 t}{1 + bt} - \text{с задержкой}, \quad (4.100)$$

$$d(t) = d_I(t) = \frac{b}{1 + c \exp(-bt)} - \text{с точкой перегиба}.$$

Процесс обнаружения ошибок (роста надёжности) можно характеризовать в зависимости от  $d(t)$  с помощью следующих определений: 1)  $H(t)$  – возрастающая функция частоты обнаружения ошибок, если  $d(t)$  возрастает при  $t \geq 0$ ; 2)  $H(t)$  – убывающая, если  $d(t)$  убывает, 3)  $H(t)$  – постоянная, если  $d(t)$  – постоянная. Функция  $M(t)$  в (4.98) и  $I(t)$  в (4.99) соответствует случаю 1). Иначе говоря, S-образные модели роста с задержкой и с точкой перегиба, описывают процесс обнаружения ошибок, в котором вероятность обнаружения ошибки растёт по мере тестирования.

Пользуясь S-образной моделью роста надёжности, показатель качества  $\Pi$  или, иначе, уровень качества  $\Pi$  (УКП) можно представить в виде:

$$\text{УКП} = A_c \times C_v, \quad (4.101)$$

где  $A_c$  и  $C_v$  – показатели правильности и полноты тестирования. Показатель правильности тестирования является мерой качества тестирования  $\Pi$ . Для его определения в  $\Pi$  перед тестированием вносятся контрольные ошибки с целью оценивания процента выявляемых с помощью данного тестирования ошибок. Пусть  $H_c(t)$  – статистически ожидаемое накопленное количество контрольных ошибок, выявляемых за время тестирования  $t$ . Определим  $N_c$  и

$M_c$  как оценённое накопленное количество контрольных ошибок, которое должно быть в конце концов обнаружено, и общее число внесённых контрольных ошибок, соответственно. Тогда значение  $A_c$  может быть оценено как:

$$A_c = \frac{\hat{N}_c}{M_c} = \frac{\hat{H}_c(\infty)}{M_c}. \quad (4.102)$$

Показатель полноты тестирования является количественной характеристикой тестирования, позволяющей анализировать процесс обнаружения априорно имеющихся в  $\Pi$  ошибок. Пусть  $H_i(t)$  – статистически ожидаемое количество априорно существующих в  $\Pi$  ошибок, выявленных за время тестирования  $t$ . Определим  $n_i$ ,  $N_i$  как общее количество априорных ошибок, выявленных в процессе тестирования, и оценённое как накопленное количество априорных ошибок, которое должно быть в конце концов определено, соответственно. Тогда оценка  $C_v$  равна:

$$\hat{C}_v = \frac{n_i}{\hat{N}_i} = \frac{n_i}{\hat{H}_i(\infty)}. \quad (4.103)$$

Средние значения  $\hat{H}_c(\infty)$ ,  $\hat{H}_i(\infty)$  в (4.102) и (4.103) могут быть оценены путём подстановки функций средних значений стохастических S-образных моделей роста для  $H_c(t)$ ,  $H_i(t)$ .

**Пример 4.3.** В результате автономной проверки на функционирование  $\Pi$  управления терминалом, работающим в режиме реального времени, было обнаружено 30 контрольных ошибок из 37 внесённых перед тестированием и 31 априорная ошибка. Для модели с задержкой были получены следующие оценки максимума правдоподобия:

$$\begin{aligned} \hat{H}_c(t) &= \hat{M}_c(t), \quad \hat{H}_i(t) = \hat{M}_i(t), \\ \hat{M}_c(t) &= 31,3[1 - (1 + 0,498t) \exp(-0,498t)], \\ \hat{M}_i(t) &= 37,9[1 - (1 + 0,311t) \exp(-0,311t)]. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Для модели с точкой перегиба оценки максимума правдоподобия следующие:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_c(t) &= \widehat{I}_c(t), \quad \widehat{H}_i(t) = \widehat{I}_i(t), \\ \widehat{I}_c(t) &= 30,2[1 - \exp(-0,75t)]/[1 + 9,0\exp(-0,75t)], \\ \widehat{I}_i(t) &= 34,7[1 - \exp(-0,326t)]/[1 + 2,745\exp(-0,326t)]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Результаты анализа представлены в работе [75] в виде графиков. ▲

$$\text{Величина } УКП = \frac{\widehat{M}_c(\infty)}{M_c} \times \frac{n_i}{\widehat{M}_i(\infty)} = \frac{31,3}{37} \times \frac{31}{37,9} = 0,692, \text{ из}$$

чего можно предположить, что тестирование позволило выявить около 70% априорных ошибок. Впоследствии было обнаружено ещё 12 априорных ошибок в процессе тестирования в режиме реального времени и двух лет эксплуатации. Таким образом, фактическое значение *УКП* по окончании автономного тестирования было равно  $31/(31+12) = 0,72$ . Показатель качества программы *УКП* точнее одного показателя  $A_c$ , оценивающего правильность тестирования путём поиска намеренно внесённых ошибок, или  $C_v$ , оценивающего полноту тестирования, основываясь на стохастических S-образных моделях роста надёжности П.

**Графовая модель программы.** Рассмотренная в данном разделе модель Нельсона имела ряд преимуществ по сравнению с другими моделями. Она позволяла учесть динамику функционирования П в реальной операционной среде, что связывалось с использованием базовой единицы программ – прогона, отсутствием допущений о характеристике операционной среды и условий эксплуатации П, отсутствием предположений о причинах фиксируемых программных ошибках, отсутствием необходимости в информации о состоянии П и др. Однако, использование модели вызывает определённые трудности в связи со сложностью нахождения вероятностных оценок, особенно для сложных П массового применения. Она не рассматривает характеристики различных программных маршрутов. Для устранения указанных недостатков модели Нельсона можно использовать структурные графовые модели надёжности П.

Рассматривается ориентированный граф  $G(V, \Gamma)$ , в котором  $V = \{v_i\}$  – множество вершин,  $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$  – множество дуг. Началь-

ная вершина  $v_0$  называется истоком, а конечная вершина  $v_k$  – стоком графа. Из каждой вершины исходит не более двух дуг, а число входящих в неё дуг не ограничивается. Делается допущение о том, что граф не имеет циклов. Нагрузкой вершин может быть либо один оператор, либо их линейная последовательность, при этом оператор-предикат может быть только завершающим в последовательности. Дуги графа отображают связи узлов модели по управлению. Каждый узел графа имеет свой вес. Каждая вершина  $v_i$  характеризуется обычно аддитивным элементарным показателем  $d_i$ , связанным с исследуемым свойством П. Совокупность таких показателей на графе образует множество  $D = \{d_i\}$ . Теперь уже модель  $G(V, \Gamma, D)$  может использоваться для статистического исследования характеристик различных маршрутов модели. Однако динамика выполнения прогона П определяется выбором определённого пути на графе. Выбор обуславливается совокупностью реализаций передач управления в вершинах-распознавателях, которые связаны со случайным процессом поступления на вход П различных векторов данных, что приводит к случайному характеру выбора маршрутов на графе. Таким образом, исследуемая П представляется сложной системой со случайной структурой, динамику функционирования которой целесообразно описывать статистически с помощью транзитивных вероятностей перехода от  $i$ -й к  $j$ -й вершине графовой модели. Пусть  $p_{ij}$  – вероятность активации дуги  $\gamma_{ij}$ ,  $p_{ij} \in P$ , то есть вероятность ухода по ней из вершины  $v_i$ . Предполагается, что для двух дуг справедливо равенство  $p(i, j_1) + p(i, j_2) = 1, j_1 \neq j_2$ . Таким образом, графовая модель П является ациклическим ориентированным нагруженным графом  $G(V, \Gamma, D, P)$ , дуги которого взвешены транзитивными вероятностями их активации  $p_{ij} \in P$ , а вершины – аддитивными характеристиками  $d_i \in D$ .

Далее полагают, что  $d_i = \ln r_i, r_i$  – вероятность безошибочного однократного выполнения последовательности операторов, ассоциируемых с вершиной  $v_i$ . Тогда вероятность  $P_m$  безошибочного выполнения маршрута  $w_m \in M$  при  $m$ -м прогоне П рав-

на  $P_m = \prod_{i \in w_m} d_i$ , а её логарифмическая мера  $\ln P_m = \sum_{i \in w_m} d_i$ . Используя приближение  $\ln P_m = P_m - 1$  при условии  $P_m + Q_m = 1, Q_m \ll 1$ , представляют  $Q_m = -\sum_{i \in w_m} d_i$ . Так как маршрут  $w_m$  реализуется с вероятностью  $p(m)$ , то полная вероятность возникновения ошибки при  $m$ -м прогоне  $\Pi$  равна:

$$Q_m = p(m) \sum_{i \in w_m} |d_i|, p(m) = \prod_{i, j \in w_m} p(i, j). \quad (4.106)$$

Оценка среднего значения вероятности ошибки  $Q_m$  задаётся рекуррентными выражениями:

$$\bar{Q}_m = \sum_j |d_j| p(j), p(j) = \sum_i p(i, j) p_i, \quad (4.107)$$

где  $p(i)$  – вероятность активации  $i$ -й вершины графа.

Модель позволяет при известных значениях  $p(i, j)$  и оценках безошибочности элементарных операторов определять характеристики надёжности  $\Pi$ .

Для практического использования модели необходимы следующие допущения:

– на любом шаге вычислений может активизироваться только одна дуга, а это означает, что параллельные вычисления не допускаются,

– для выполнения ацикличности графа модели необходимо использовать некоторые преобразования.

Считается, что модель позволяет преодолевать недостатки модели Нельсона при определении значений  $Q_m$ . В настоящее время имеются статистические данные, характеризующие элементы множества  $D$ . Одним из путей задания транзитивных вероятностей  $p_{ij} \in P$  для расчёта значений  $Q_m$  служит предположе-

ние, что  $p(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если из } v_i \text{ исходит одна дуга;} \\ 0,5, & \text{если из } v_i \text{ исходит две дуги.} \end{cases}$  В работе [74]

приводится пример использования графовой модели для расчёта показателя  $P_m$  корректности  $\Pi$ .

**Нечеткая модель программы** основана на теории нечётких множеств. Нечётким множеством  $\Lambda(x, \mu_L(x))$  называется совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов  $x \in X$  универсального множества  $X$  и соответствующих функций принадлежности  $\mu_L(x)$ , определяющих степень принадлежности  $x$  к нечёткому множеству ( $\mu_L(x) \in [0,1]$ ). Используется понятие лингвистическая переменная. Это переменная, значениями которой могут быть слова или предложения естественного или искусственного языка [22]. Так как слова в общем случае менее точны, чем числа, это понятие может характеризовать приближённо показатели надёжности, которые в силу определённых причин не могут иметь количественных оценок. Например, «безошибочная»  $\Pi$  может рассматриваться как название нечёткого множества, представляющее собой ограничение, обусловленное нечёткой переменной «безошибочное». С этой точки зрения понятия «почти безошибочное», «более или менее безошибочное», «небезошибочное» и т.д. – названия нечётких множеств, образованных действием модификаторов «почти», «более или менее», «не» и других на нечёткое множество «безошибочное». В сущности эти нечёткие множества совместно с нечётким множеством «безошибочное» являются лингвистическими значениями лингвистической переменной «корректность»  $\Pi$ .

Лингвистическая переменная характеризуется набором  $(\Lambda, T(\Lambda), X, G, \mu)$ , в котором  $\Lambda$  – название лингвистической переменной,  $T(\Lambda)$  – терм-множество названий лингвистических значений переменной  $\Lambda$ ;  $G$  – синтаксическое правило, порождающее названия  $\{L\}$  значений логической переменной  $\Lambda$ ;  $\mu$  – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждому  $L$  его смысл  $\mu(L)$ , то есть нечёткое множество  $\mu(L)$  универсального множества  $X$ . Конкретное название  $L$ , порождённое синтаксическим правилом  $G$ , называется термом. Терм, состоящий из одного или нескольких слов, всегда используемых совместно, является составным термом.

Взаимосвязи между  $\Lambda$ , её лингвистическими значениями и базовой переменной  $x$  показаны на рис. 4.10.



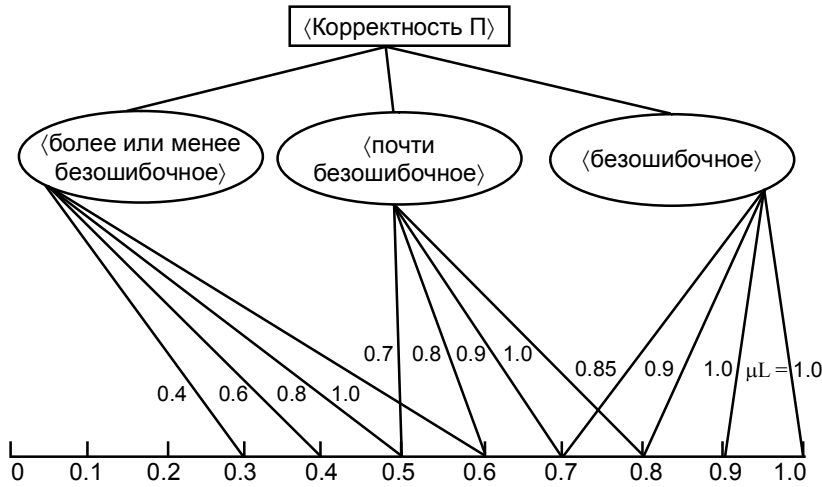


Рис. 4.10

Рассмотренные понятия позволяют предложить обобщённую графовую модель программы (ОГМП) в виде  $GG(V, \Gamma, \Lambda, P)$ , где  $\Lambda$  – вектор логической переменной  $\Lambda_i \in \Lambda$ , задающих нечёткие характеристики вершин  $v_i \in V$  ОГМП;  $P$  – матрица логической переменной  $p(i, j) \in P$ , задающих лингвистические значения транзитивных вероятностей передачи управления от  $v_i$ -х к  $v_j$ -м вершинам ОГМП. Если нечёткими являются только  $\Lambda_i$  или  $p(i, j)$ , можно получить ГМП с нечёткими характеристиками вершин  $G(V, \Gamma, \Lambda, P)$  или с нечёткими характеристиками транзитивных вероятностей  $G(V, \Gamma, D, P)$ .

Введём логическую переменную  $\Lambda_i$  «безошибочность однократного выполнения последовательности операторов алгоритмического языка, ассоциируемых с вершиной  $v_i$ », имеющую следующее терм-множество  $T(\Lambda_i)$  «безошибочность» := «очень высокая» + «достаточно высокая» + «почти высокая» + «высокая» + «более или менее высокая» + «невысокая» + «средняя» + «более или менее низкая» + «низкая» + «очень низкая».

Введём нечёткую переменную «значение», терм-множество которой зададим с помощью трёх первичных термов, показанных на рис. 4.11 [24]:  $a_1^T = \langle \text{высокое} \rangle$ ;  $a_2^T = \langle \text{среднее} \rangle$ ;  $a_3^T = \langle \text{низкое} \rangle$ ,  $a_j^T \in [0,1]$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Тогда вероятность безошибочного выполнения маршрута  $w_m \in M$  при  $m$ -м прогоне  $P_m$  определится с помощью средней оценки результирующей функции принадлежности:

$$P_m = \left[ \sum_k \mu_{\Sigma_k}(x_k) x_k \right] / \left[ \sum_k \mu_{\Sigma_k}(x_k) \right]. \quad (4.108)$$

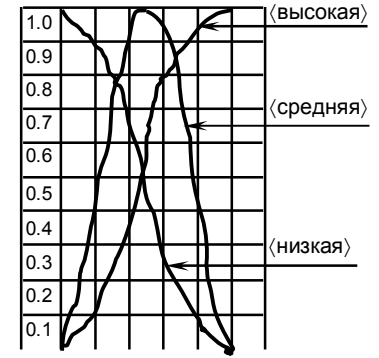


Рис. 4.11

При рассмотрении способа определения результирующей функции принадлежности  $\mu_{\Sigma_k}(x_k)$  для  $m$ -го маршрута ОГМП выделяют два случая.

**С л у ч а й 1.** Маршрут  $w_m$  не содержит контрольных операторов и других избыточных средств повышения надёжности. Пусть для каждой из вершин  $v_i$  ОГМП известна соответствующая функция принадлежности  $\mu_{ik}^{\alpha_i}(x_k)$ , где  $\alpha_i$  – модификатор для первичных термов, определяемый следующим образом (рис. 4.12):

Семантика $\alpha_i$	Значение $\alpha_i$
«очень»	2,0
«достаточно»	1,25
«почти»	0,75
«более или менее»	0,5

Рис. 4.12.

Результирующая функция принадлежности определяется значением безошибочности самого «слабого звена», то есть наи-

менее надёжной вершины маршрута  $w_m$ . Это соответствует операции минимума [40] и

$$\mu_{\sum_k}^{(1)}(x_k) = \min_i \{\mu_{ik}^{\alpha_i}(x_k)\}. \quad (4.109)$$

**С л у ч а й 2.** В состав операторов маршрута  $w_m$  входят контрольные операторы. На оценку  $\mu_{\sum_k}(x)$  влияет компенсаторный механизм, позволяющий уменьшить ненадёжность «слабых звеньев» за счёт влияния контрольных операторов. Тогда  $\mu_{\sum_k}(x_k) = \left[ \sum_{i \in w_m} \mu_{ik}^{\alpha_i}(x_k) + \Delta\mu_k(x_k) \right] / |w_m|$ , где  $\Delta\mu_k(x_k)$  характеризует компенсаторный механизм, проявляющийся в результате реализации контрольных операторов на маршруте  $w_m$  ГМП,  $|w_m|$  – число вершин маршрута.

Каждый из маршрутов ОГМП реализуется с лингвистической вероятностью  $p(m)$ . Функция принадлежности  $\mu_Q$  лингвистической вероятности ошибки при выполнении  $m$ -го прогона П с выражением (4.99) может быть задана как композиция  $\mu_Q = \bar{P} \circ p(m)$ , где  $\bar{P}$  – вектор средних оценок результирующих функций принадлежности  $\mu_{\sum_k}(x_k)$ .

**Пример 4.4.** ОГМП имеет три маршрута, для которых заданы  $p(1) = 0,8/0,7 + 0,9/0,8 + 0,2/0,9$ ;  $p(2) = 0,4/0,7 + 0,1/0,8 + 0,1/0,9$ ;  $p(3) = 0,2/0,7 + 0,3/0,8 + 0,1/0,9$ . При этом использована традиционная форма задания нечёткого множества в виде  $\sum_k \mu_k / x_k$ . Средние оценки безошибочности результирующих функций принадлежности для указанных трёх маршрутов равны  $\bar{P}_1 = 0,02$ ;  $\bar{P}_2 = 0,1$ ;  $\bar{P}_3 = 0,03$ . Тогда функция принадлежности определяется как максимальное произведение:

$$[0,02 \ 0,1 \ 0,03] \circ \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} = [0,09 \ 0,01 \ 0,03],$$

а функция принадлежности лингвистической вероятности примет вид:  $\mu_Q = 0,09/0,7 + 0,01/0,8 + 0,3/0,9$ . Средняя оценка функции

принадлежности  $\bar{Q}_m = \left[ \sum_k \mu_Q(x_k) x_k \right] / \left[ \sum_k x_k \right]$  в численном виде равна

$$\bar{Q}_m = (0,09 \cdot 0,7 + 0,01 \cdot 0,8 + 0,03 \cdot 0,9) / (0,7 + 0,8 + 0,9) = 0,04.$$



Аналогичным образом можно определить лингвистическую оценку различных показателей надёжности П (устойчивость), (восстанавливаемость) и т.д. Пользователю можно представить вектор оценок лингвистических переменных надёжности для последующего анализа элементов вектора и принятия решений. Однако из-за трудностей векторных процедур выбора и принятия решений целесообразно использовать обобщённые показатели надёжности П, вычисляемые как лингвистические средние обобщённой функции принадлежности  $\mu_{\sum_k}(x_k)$ . Для построения её можно применять различные операции над нечёткими множествами, в основу которых положены три подхода [24].

*Первый подход* предполагает, что обобщённый показатель определяется худшими значениями лингвистической переменной (принцип «слабого звена»). Тогда обобщённая функция принадлежности определяется по формуле (4.109).

*Второй подход* исходит из того, что по мере увеличения номенклатуры показателей надёжности степень уверенности в адекватности оценки обобщённого показателя необязательно монотонно возрастает. Тогда обобщённая функция принадлежности определяется как  $\mu_{\sum_k}^{(2)}(x_k) = \max \{\mu_{ik}^{\alpha_i}(x_k)\}$ .

*Третий подход* предполагает монотонность возрастания степени уверенности в адекватности оценки обобщённого показателя с увеличением номенклатуры показателей надёжности, то

есть  $\mu_{\sum_k}^{(3)}(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{при } \sum_k \mu_{\sum_k}(x_k) \geq 1; \\ \sum_k \mu_{\sum_k}(x_k) & - \text{иначе.} \end{cases}$  Для расчёта обобщённого

показателя используется лингвистическое среднее, определяемое по формуле (4.103).

**Пример 4.5.** Выполним сопоставительный анализ надёжности группы П с помощью количественной оценки обобщённого показателя. Пусть анализируется шесть фондируемых П с  $\{\pi_j\}$ , ( $j = \overline{1,6}$ ) по двум показателям: «восстанавливаемость» ( $k = 1$ ) и «корректность» ( $k = 2$ ). В результате экспертизы фондируемых П без модификации функции принадлежности получена следующая матрица «объект–свойство» (позиции 1–2 табл. 4.6).

Т а б л и ц а 4.6

№	Свойство–надёжность	Объект–программа					
		$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$
1	«восстанавливаемость»	«низкий»	«средний»	«низкий»	«средний»	«средний»	«высокий»
2	«корректность»	«низкий»	«низкий»	«высокий»	«средний»	«высокий»	«высокий»
3	$C_{\Sigma}^{(1)}$	0,27	0,42	0,5	0,5	0,58	0,73
	$C_{\Sigma}^{(2)}$	0,27	0,36	0,5	0,5	0,64	0,73
	$C_{\Sigma}^{(3)}$	0,27	0,37	0,5	0,5	0,63	0,68

Тогда, например для П  $\pi_2$  на основе первого подхода с использованием формулы (4.104) определим обобщённую функцию принадлежности:

$$\begin{aligned} \mu_{\Sigma_k}^{(1)}(\pi_2, x_k) &= (0/0 + 0,08/0,1 + 0,32/0,2 + 0,68/0,3 + 0,92/0,4 + \\ &+ 1/0,5 + 0,92/0,6 + 0,68/0,7 + 0,32/0,8 + 0,08/0,9 + 0/1) \& (1/0 + \\ &+ 0,98/0,1 + 0,92/0,2 + 0,82/0,3 + 0,68/0,4 + 0,5/0,5 + 0,38/0,6 + \\ &+ 0,18/0,7 + 0,08/0,8 + 0,02/0,9 + 0/1) = \\ &= 0/0 + 0,08/0,1 + 0,32/0,2 + 0,68/0,3 + 0,68/0,4 + 0,5/0,5 + \\ &+ 0,38/0,6 + 0,18/0,7 + 0,08/0,8 + 0,02/0,9 + 0/1; \end{aligned}$$

$$C_{\Sigma}^{(1)}(\pi_2) = \left[ \sum_k^{(1)} \mu_{\Sigma_k}^{(1)}(\pi_2, x_k) x_k \right] / \left[ \sum_k^{(1)} \mu_{\Sigma_k}^{(1)}(\pi_2, x_k) \right] = 0,42.$$

На рис. 4.13 приведены графики обобщённой функции принадлежности.

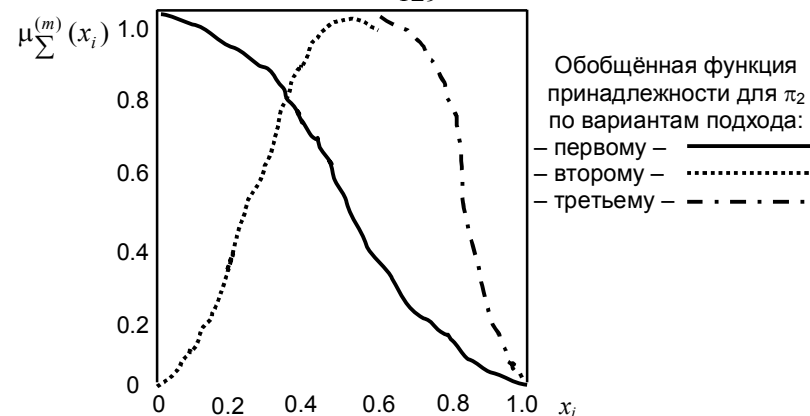


Рис. 4.13

Из анализа полученных результатов следует, что реализация различных подходов к формированию обобщённой функции принадлежности позволяет определять в общем случае разные значения обобщённых показателей надёжности П. Поэтому на различных стадиях жизненного цикла П целесообразно вычисление всех трёх обобщённых показателей, что обеспечит возможность предпочтения той или иной П в зависимости от критерия выбора. Например, при фондировании П можно задавать разные уровни их приёмки для «пессимистических», «средних» и «оптимистических» значений обобщённых показателей надёжности, а при сопровождении П устанавливать различные организационно-технические режимы и экономические условия обслуживания объектов.

**Другие вероятностные модели.** К этим моделям отнесём модели, предложенные указанными выше авторами или другими, но не получившие достаточно широкого применения в практике исследования сложных программных комплексов объектов.

**Модель Шумана.** Предполагается, что в начале тестирования П в ней имеется  $N_0$  ошибок. С этого момента в течение времени  $\tau$  производится отладка П. Время тестирования включает затраты на выявление ошибок с помощью тестов, на контрольные проверки и т.п., при этом время исправного функционирования П не учитывается. В течение времени отладки  $\tau$  устраняется  $\varepsilon(\tau)$  ошибок в расчёте на одну команду в машинном языке. Таким об-

разом, удельное число ошибок на одну машинную команду, остающихся в П после  $\tau$  месяцев отладки, равно:

$$\varepsilon_0(\tau) = \frac{N_0}{I_0} - \varepsilon(\tau), \quad (4.110)$$

где  $I_0$  – общее число машинных команд, которое предполагается постоянным.

Далее, предполагается, что интенсивность ошибки П  $\lambda(t)$  пропорциональна числу ошибок, оставшихся в П после её отладки в течение времени  $\tau$ , то есть  $\lambda(t) = C\varepsilon_0(\tau)$ . Тогда, если время функционирования П  $t$  отсчитывается от точки  $t = 0$ , а  $\tau$  остаётся фиксированным, то вероятность безошибочной работы в течение времени  $t$ , равна:

$$R(t, \tau) = \exp\{-C[N_0/I_0 - \varepsilon(\tau)]t\}. \quad (4.111)$$

Если в ходе отладки прогоняется  $k$  тестов в интервалах  $(0, \tau_1)$ ,  $(0, \tau_2)$ , ...,  $(0, \tau_k)$ ,  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ , то можно показать, что при  $k \geq 2$  для определения оценок максимального правдоподобия  $\tilde{C}$  и  $\tilde{N}_0$  двух параметров  $C$  и  $N_0$  достаточно использовать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \sum_{j=1}^k n_j / \sum_{j=1}^k [\tilde{N}_0/I_0 - \varepsilon(\tau_j)]T_j, \\ \tilde{C} &= \left\{ \sum_{j=1}^k n_j / [\tilde{N}_0/I_0 - \varepsilon(\tau_j)] \right\} / \sum_{j=1}^k T_j, \end{aligned} \quad (4.112)$$

где  $n_j$  – число прогонов  $j$ -го теста, оканчивающегося ошибкой;  $T_j$  – время, затраченное на выполнение успешных и безуспешных прогонов  $j$ -го теста.

Асимптотические значения дисперсий  $\tilde{C}$  и  $\tilde{N}_0$  (для больших значений  $n_j$ ) определяются выражениями:

$$\text{Var}(\tilde{C}) \cong \frac{1}{\frac{\sum n_j}{C^2} - \frac{(\sum T_j)^2}{\sum \frac{n_j}{\tau_0^2(\tau_j)}}}, \text{Var}(\tilde{N}_0) = \frac{I_0^2}{\sum \frac{n_j}{\varepsilon_0^2(\tau_j)} - \frac{C^2(\sum T_j)^2}{\sum n_j}}. \quad (4.113)$$

Коэффициент корреляции определяется как

$$\rho(\tilde{C}, \tilde{N}_0) = \sum \frac{n_j}{\varepsilon_0(\tau_j)} / \left[ \sum n_j \sum \frac{n_j}{\varepsilon_0^2(\tau_j)} \right]^{1/2}. \quad (4.114)$$

Асимптотические значения дисперсий и коэффициента корреляции используются для определения доверительных интервалов значений параметров  $C$  и  $N_0$  на основе теории нормального распределения случайных величин.

Вся система исследования программ должна быть снабжена входными данными, отражающими реальные условия их функционирования. Эти данные, как и в модели Э. Нельсона, принято называть функциональным разрезом и определять их главным образом через распределение вероятностей значений входных переменных.

**Модель Шика-Уолвертона** основана на предположении, что интенсивность ошибки П пропорциональна не только количеству ошибок в ней, но и продолжительности процесса тестирования. Кроме того, предполагается, что чем больше П тестируется, тем больше появляется шансов на обнаружение и устранение ошибок, так как в процессе отладки некоторые участки П «подчищаются», что облегчает её дальнейшее тестирование. Допущения: 1) все ошибки равновероятны и независимы друг от друга; 2) все ошибки одинаково критичны для объекта; 3) исправление ошибок не вносит новых ошибок в П. Здесь сохраним обозначения модели Седякина-Джелинского-Моранды. Интенсивность ошибки  $\lambda(t) = \eta(N - i + 1)\tau_i$ . Вероятность безошибочного функционирования П в течение времени  $t$  равна:  $P(\tau_i) = \exp(-\eta[N - i + 1]\tau_i)$ , а плотность вероятности времени до ошибки  $w(\tau_i) = \eta[N - i + 1]\tau_i \exp(-\eta[N - i + 1]\tau_i^2/2)$ . Таким образом, на рассматриваемых участках времени тестирования П используется распределение Рэлея. Замечание автора книги. Для распределений, отличных от экспоненциального, когда интенсивность ошибки изменяется со временем, необходимо использовать условные распределения. При этом условная вероятность для определённого интервала тестирования должна соответствовать промежутку времени от начала тестирования П до начала рассматри-

ваемого интервала тестирования. Иначе данный процесс восстановления при условии устранения выявленных ошибок будет приводить к завышению вероятностей безошибочного функционирования П на всех участках её тестирования.

**Модели М. Липова.** *Первая модель* является обобщением моделей Седакина-Джелинского-Моранды и Шика-Уолвертона. В отличие от этих моделей в моделях М. Липова допускается более одной ошибки в интервале тестирования, и кроме того, не все из ошибок, обнаруженных в этом интервале, могут быть исправлены. Кроме допущений, учитываемых в модели Шика-Уолвертона, здесь приняты: 1) интенсивность обнаружения ошибок на интервале постоянна; 2) на  $i$ -м интервале обнаруживаются  $f_i$  ошибок, а исправляются только  $n_i$ ,  $n_i \leq f_i$ ; 3) интервалы тестирования  $\tau_i$  фиксированные, а не произвольные. Интенсивность ошибки определяется как  $\lambda(t) = \eta[N - F_{i-1}]$ ,  $\tau_{i-1} < t < \tau_i$ ,

$$F_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} n_j$$

– общее количество ошибок, исправленных к моменту времени  $\tau_{i-1}$ , а  $\tau_i$  – время окончания  $i$ -го интервала тестирования, измеренное обычным способом или таймером процессора. *Вторая модель* является обобщением модели Шика-Уолвертона. Она основана на предположениях, что интенсивность обнаружения ошибок пропорциональна текущему количеству ошибок в П и общему времени, затраченному на её тестирование, включая также «среднее» время поиска ошибки, обнаруженной на интервале тестирования. Интенсивность ошибки определяется как

$$\lambda(t) = \eta(N - F_{i-1}) \left( \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j + \frac{\tau_i}{2} \right), \quad \tau_{i-1} < t < \tau_i, \quad \text{где } F_{i-1} -$$

общее количество ошибок, исправленных к моменту  $\tau_{i-1}$ . Данная формула отличается от формулы первой модели множителем во вторых скобках, отражающим изменение интервала тестирования.

**Геометрическая модель** является модификацией модели Седакина-Джелинского-Моранды, предложенной П.Б. Морандой. Основана на предположении о том, что начальное количество ошибок П  $N$  не фиксировано (не ограничено), более того, не все ошибки встречаются с одинаковой вероятностью. Также предпо-

лагается, что чем дольше длится процесс отладки П, тем труднее становится обнаруживать в ней ошибки, и, таким образом, П никогда полностью не освобождается от ошибок. Допущения: 1) количество ошибок в П неограниченно; 2) ошибки равновероятные; 3) процесс обнаружения ошибок не зависит от самих ошибок; 4) интенсивность обнаружения ошибок изменяется по закону геометрической прогрессии, но между моментами обнаружения ошибок интенсивность постоянна. Интенсивность ошибки определяется как  $\lambda(t) = DK^{i-1}$ , где  $t$  – интервал тестирования между обнаружением  $(i-1)$  и  $i$  ошибок. При этом  $\lambda(0) = D$ , а затем интенсивность ошибки убывает со скоростью геометрической прогрессии ( $0 < K < 1$ ) по ходу процесса обнаружения ошибок. Скорость изменения  $\lambda(t)$  пропорциональна инвертированному значению константы  $K$ :

$$K = \frac{DK^{i-1} - DK^{i-2}}{DK^i - DK^{i-1}} = \frac{1}{K} > 1, \quad \text{что приводит к убыванию шага изменения } \lambda(t) \text{ в процессе обнаружения ошибок.}$$

Таким образом, более поздние ошибки труднее обнаружить, и они оказывают меньшее влияние на уменьшение потока ошибок, чем предыдущие ошибки. Если снова полагать  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ , тогда, согласно второму и третьему предположению,  $\tau_i$  распределено экспоненциально с плотностью распределения  $w_i(t) = DK^{i-1} \times \exp(-DK^{i-1}t)$ , где  $\tau_{i-1} < t < \tau_i$ . Эта модель не позволяет определить, сколько ошибок осталось в П, но с её помощью можно найти его «уровень частоты»:

$$r_{\Pi} = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_k)}{\lambda(t_0)} = \frac{D - DK^k}{D} = 1 - K^k.$$

Оценка максимального правдоподобия для этого значения будет равна  $\tilde{K}_{\Pi} = 1 - \tilde{K}^k$ .

**Модель Шнейдевинда** основана на том, что чем позже встречаются ошибки, тем большее значение они имеют для процесса предсказания ошибок в П. Предполагают, что имеется  $m$  интервалов тестирования и что на  $i$ -м интервале обнаруживают  $f_i$  ошибок. Тогда возможны три различных подхода: 1) использовать данные на всех интервалах; 2) не рассматривать данные об

ошибках, обнаруженных на первых  $(s-1)$  интервалах, и использовать только данные с  $s$ -го интервала по  $m$ -й; 3) использовать суммарное количество ошибок, обнаруженных с первого по  $(s-1)$  интервал, то есть  $F_{s-1} = \sum_{i=1}^{s-1} f_i$ , и отдельные ошибки с  $s$ -го по  $m$ -й интервалы.

Первый подход предлагается использовать в тех случаях, когда для предсказания будущего состояния П необходимы данные со всех интервалов тестирования. Второй подход – когда есть причины полагать, что произошёл некий перелом в процессе обнаружения ошибок, и только данные последних  $m - (s-1)$  интервалов имеет смысл учитывать в прогнозах на будущее. И, наконец, третий подход является компромиссом между первыми двумя подходами. Приняты допущения: 1) количество ошибок на интервале тестирования не зависит от количества ошибок на остальных интервалах; 2) количество обнаруженных ошибок убывает от одного интервала к другому; 3) все интервалы тестирования имеют одинаковую длину; 4) интенсивность обнаружения ошибок пропорциональна количеству ошибок, содержащихся в П в текущий момент времени.

**Модель Вейса.** В данной модели предполагается экспоненциальное распределение интервалов времени между ошибками, а также, что существует  $M$  причин возможных ошибок в начале процесса разработки П. Осуществляются контрольные проверки длительностью по  $t_{пр}$  в произвольные моменты времени. Полученные результаты фиксируются: время возникновения ошибки или факт её отсутствия. Предполагается, что интенсивность ошибки каждого типа различна и представляется некоторым априорным распределением вероятностей интенсивности ошибки. Если при данном испытании происходит ошибка, то вероятность того, что она корректируется, равна  $p_c \leq 1$ . Большинство следствий, вытекающих из этих предположений, демонстрируется на простых примерах. Основными результатами являются вывод функции для предсказания надёжности П, с помощью которой можно определить количество исключаемых ошибок при заданном числе испытаний. Для этой модели среднее время между

ошибками может быть аппроксимировано экспоненциальной функцией числа испытаний, для которой характерен процесс роста с увеличением числа испытаний.

Модель может быть полезна для оценки надёжности П в предположении, что каждая из  $M$  причин (источников) ошибок представляет собой ошибки некоторого типа, многократно встречающиеся в П, например «недостаточен выделенный объём памяти для массива данных».

Для ошибок некоторых типов, например таких, как в указанном случае, существует высокая вероятность того, что при однократном их обнаружении и устранении возможность появления такой ошибки в будущем исключена. Для ошибок других типов однократное их обнаружение приводит к исключению подобных ошибок только из относительно небольшой части мест в П. Эта часть ошибок в модели и характеризуется вероятностью  $p_c$ , которая, вообще говоря, различна для каждого источника ошибок и должна быть предварительно оценена на основе фактических данных.

Как и во всех моделях для прогнозирования надёжности функционирования технических устройств, в случае моделей надёжности П «временной интервал» должен выбираться из соображений обеспечения представительности исходных данных. Это означает, что тестирование П даже в течение длительного промежутка времени с использованием лишь ограниченной области значений входных данных будет давать несмещённые оценки надёжности только в том случае, если в реальных условиях вероятность появления значений входных данных из непроверенной области будет близка к нулю. Подобное условие уже рассматривалось при обсуждении требований, предъявляемых к так называемой «программе исследователя» в модели Шумана [80].

**Байесовская модель Б. Литтлвуда.** В общей модели Литтлвуда [37], как и в модели Мусы, учитывается случайность входных данных. Но в модели Литтлвуда процесс устранения ошибок вносит дополнительную неопределённость, а это приводит к тому, что интенсивность ошибки является также случайной. В модели Мусы интенсивность ошибки случайной не является, поскольку получаемое улучшение модели Литтлвуда не компен-

сирует её усложнения. В силу своей большей сложности модель Литтлвуда обычно быстрее приводит к математическим трудностям, чем модель Мусы.

В модели Литтлвуда условная плотность вероятности для интервалов между ошибками  $\tau_i$  определяется так:

$$a(\tau/\lambda_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i \tau_i}. \quad (4.115)$$

Интенсивность ошибки по предположению является случайным процессом, условная плотность вероятности которого описывается гамма-распределением

$$g(\lambda_i/\alpha, \psi(i)) = \frac{\psi(i) \{\psi(i)\lambda_i\}^{\alpha-1} \exp(-\psi(i)\lambda_i)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (4.116)$$

Безусловная плотность вероятности интервала  $\tau_i$  определяется распределением Парето. Параметры  $\alpha$  и  $\psi(i)$  являются свободными параметрами модели. Увеличение надёжности учитывается параметром  $\psi(i)$ . Рекомендуется для каждой П исследовать различные семейства функций увеличения надёжности и выбрать ту из них, которая наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными. Функция  $\psi(i)$  отражает результаты работы по устранению ошибок. Предложено пользоваться двумя:  $\psi(i) = \beta_1 + \beta_2 i$ ,  $\psi(i) = \beta_1 + \beta_2 i^2$ . Муса предложил в качестве  $\psi(i)$ :  $\psi(i) = \frac{E_0 T_0 \alpha}{E_0 - i}$ , где  $E_0$  – число ошибок за время эксплуатации П,  $T_0$  – начальное значение средней наработки на ошибку,  $\alpha$  – параметр гамма-распределения, а  $i$  – порядковый номер ошибки.

Величины параметров функции  $\psi(i)$  устанавливаются путём проверки согласия с экспериментальными данными по критерию Крамера-Мизеса. Для таких расчётов требуется значительный объём данных и производится минимизация критерия на многомерной поверхности. Это требует огромных затрат машинного времени, на несколько порядков больше, чем при расчётах для модели Мусы. Разницу в объёме вычислений можно несколько уменьшить, если для согласия с экспериментом применять оценку параметров методом максимального правдоподобия.

При байесовском анализе предполагается, что априорная плотность вероятности параметра  $\alpha$  является равномерной.

В результате приходят к выражению для интенсивности ошибки:

$$\lambda(\tau) = \frac{k}{\Psi(k)} \left[ \log \prod_{i=1}^k \frac{\psi(i) + \tau_i}{\psi(i)} \right]^{-1}, \quad (4.117)$$

считается, что произошло  $k-1$  ошибок,  $\tau_i$  – время между  $(i-1)$ -й и  $i$ -й ошибками.

Литтлвуд вывел также выражения для процентилей  $i \geq 0$  распределения интервалов времени между  $(k+i-1)$  и  $(k+i)$ -й ошибками для  $i \geq 0$ . Если  $k$ -й номер следующей ошибки, то  $100q$ -й процентиль  $J_{q,k+i}$  равен:

$$J_{q,k+i} = \psi(k+i) \{ \theta^{[(1-q)^{-1}/(k+1)]} - 1 \}, \quad (4.118)$$

где 
$$\theta = \prod_{i=1}^k \frac{\tau_i + \psi(i)}{\psi(i)}. \quad (4.119)$$

Общая модель Литтлвуда проверялась на одной совокупности проектных данных и дала хорошие результаты.

Модель Литтлвуда математически более изящна, чем модель Мусы, но достаточно сложна, затрудняет понимание и существенно увеличивает объём вычислений. Она позволяет характеризовать как повышение, так и понижение надёжности. Модель Мусы распознаёт ситуацию, когда надёжность не возрастает или не убывает, но дальнейшее поведение надёжности не прогнозируется. Это не считается недостатком, так как прогноз спада надёжности, вероятно, гораздо менее точен, чем прогноз её увеличения, поскольку о механизмах спада надёжности известно значительно меньше.

Литтлвуд не вывел формулу для времени функционирования, необходимого для обеспечения заданной надёжности. Он получил формулы лишь для частного случая дифференциальной модели ошибки.

В модели Литтлвуда отсутствует компонента календарного времени, входящая в модель Мусы. Следовательно, процесс достижения заданной надёжности невозможно связать с календарными датами, что было бы весьма желательно для программистов и руководителей работ.

Параметрам модели Мусы легко дать физическую интерпретацию, чего нельзя сказать о модели Литтлвуда. Поэтому для предсказания надёжности с помощью модели Литтлвуда нельзя применять последние результаты исследований надёжности программных средств.

В дифференциальной модели дефектов увеличение надёжности моделируется путём изменения обоих параметров гамма-распределения, описывающего интенсивность ошибки. Выдвинута гипотеза, что ошибки происходят с разными частотами, что объясняется вариацией частоты, с которой появляются различные входные состояния при выполнении П. Постулируется, что увеличение надёжности связано с двумя источниками, и это увеличение описывается обоими параметрами гамма-распределения. Первым источником является обнаружение и устранение дефектов, а второй источник связан с гипотезой, что ошибки происходят с различными частотами: дефекты, встречающиеся чаще, обнаруживаются и устраняются первыми. Полагается, что неопределённости в увеличении надёжности скорее всего вызваны неопределённостями в относительных частотах появления различных входных состояний, а не неидеальностью устранения дефектов.

Случайный процесс, описывающий интенсивность ошибок  $\lambda$ , есть сумма случайных процессов  $\phi_i$ , каждый из которых связан с конкретным дефектом, то есть  $\lambda = \sum_{i=1}^{N-k} \phi_i$ , где  $N$  – общее число дефектов в П, а  $k$  – число дефектов, обнаруженных и устранённых к текущему моменту. Считается, что распределения вероятностей, связанные с отдельными дефектами, перед отладкой имеют вид одинаковых гамма-распределений. Плотность вероятности имеет вид:  $f(\phi) = (\beta^\alpha \phi^{\alpha-1} e^{-\beta\phi}) / \Gamma(\alpha)$ ,  $\phi > 0$ . Распределения слагаемых  $\phi_i$  следует искать с помощью формулы Байеса. В результате получается условное распределение процесса  $\phi_i$ , причём полагается, что  $i$ -й дефект не был устранён к текущему моменту времени.

Полная интенсивность ошибок даётся формулой  $\lambda = ((N - n)\alpha) / \beta + \tau$ , где  $\tau$  – суммарное время функционирования П к моменту определения интенсивности ошибок. Плотность ве-

роятности длительности времени до следующей ошибки  $\tau'$  представляется распределением Парето:

$$f(\tau') = \frac{(N - k)\alpha(\beta + \tau)^{(N-k)\alpha}}{(\beta + \tau + \tau')^{(N-k)\alpha+1}}. \quad (4.120)$$

Из (4.120) следует: 1) после обнаружения и устранения каждой ошибки интенсивность ошибок уменьшается на  $\alpha/(\beta + \tau)$ . Исправления в начале испытаний, при малых  $\tau$ , уменьшают интенсивность ошибок сильнее, чем последующие исправления; 2) в периоды безошибочной работы интенсивность ошибок уменьшается, так как  $\tau$  находится в знаменателе дроби.

Если  $\alpha \rightarrow \infty$  и  $\beta \rightarrow \infty$  так, что их отношение  $\alpha/\beta$  остаётся постоянным, то распределение (4.120) переходит в экспоненциальное.

Модель дефектов не была проверена на соответствие реальным данным. Однако она заслуживает внимания из-за важности вопроса о дифференциальных частотах дефектов. Эта модель сложнее модели, предполагающей, что все дефекты выявляются с одинаковой частотой. Неясно, обеспечит ли эта модель такое увеличение точности, которое компенсирует её повышенную сложность. Модель выглядит справедливой, если считать, что ошибки программистов равномерно распределяются по всем возможным состояниям П. Это правомочно, так как они тратят примерно одинаковое время на обдумывание каждого из состояний входа и тех действий с реализацией их в П, которые надо предпринять, если это состояние встретится. Гораздо дальше от реального предположение, что по отношению к командам дефекты распределены одинаково часто. Такая модель описывала бы работу программиста так, как будто бы он допускает лишь описки, но подавляющее большинство ошибок не являются описками. Но может быть справедливо предположение и о том, что дефекты распределены равномерно по времени функционирования. Так происходит, если программисты уделяют больше времени проработке частей П, относящихся к тем состояниям входа, которые встречаются чаще, так что частота дефектов для данного состояния входа хотя бы приблизительно будет обратно пропорциональна частоте его появления. Это предположение также допустимо. Но сказать, какое из двух указанных предположений ближе к истине, можно только на основе проверки на реальных данных.